

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Ernst A. EICHELBRENNER

1^{re} THÈSE: Méthodes de calcul de la couche limite laminaire
bidimensionnelle en régime compressible

2^e THÈSE: Problème de Cauchy et transformation de Fourier

Soutenues le 25 Juin 1955, devant la Commission d'examen.

MM. J. PÉRÈS, Président

PONCIN	}	Examineurs.
BRUN		
L. SCHWARTZ		

O.N.E.R.A.

29, Avenue de la Division Leclerc
CHATILLON-SOUS-BAGNEUX

1956

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Ernst A. EICHELBRENNER

1^{re} THÈSE: Méthodes de calcul de la couche limite laminaire
bidimensionnelle en régime compressible

2^e THÈSE: Problème de Cauchy et transformation de Fourier

Soutenues le 25 Juin 1955, devant la Commission d'examen.

MM. J. PÉRÈS, Président

PONCIN	}	Examineurs.
BRUN		
L. SCHWARTZ		

O.N.E.R.A.

29, Avenue de la Division Leclerc
CHATILLON-SOUS-BAGNEUX

1956

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen J. PÉRÈS

PROFESSEURS

G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	FROMAGEOT	T	Chimie biologique.
E. DARMOIS	T	Enseignement de Physique.	LAPORTE	T	Physique Générale et Radio- activité.
R. LEVY	T	Physiologie comparée.	JANET	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
FOCH	T	Mécanique physique et expérimentale	PETIT	T	Biologie maritime.
PAUTHENIER	T	Electrotechnique générale.	QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.
De BROGLIE	T	Théories physiques.	GALLIEN	T	Embryologie.
JOB	T	Chimie générale.	EICHORN	T	Biologie végétale (P.C.B.).
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées.	De CUGNAC	T	Biologie végétale (P.C.B.).
GARNIER	T	Géométrie supérieure.	Melle CAUCHOIS	T	Chimie Physique.
PERES	T	Mécanique des fluides et applications.	THELLIER	T	Physique du Globe.
LAUGIER	T	Physiologie générale.	AUDUBERT	T	Electrochimie.
M. CURIE	T	Physique (P.C.B.).	L'HERITIER	T	Génétique.
BARRABE	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.	GRIVET	T	Radioélectricité.
G. DARMOIS	T	Calcul des probabilités et Physique Mathématiques	PONCIN	T	Mécanique des fluides.
J. BOURCART	T	Géographie physique et Géologie dynamique.	THIRY	T	Mécanique appliquée.
Mme JOLIOT-CURIE	T	Physique nucléaire et Radioactivité.	DUBREIL	T	Arithmétique et théorie des nombres.
PLANTEFOL	T	Botanique.	QUELET	T	Chimie organique.
CABANNES	T	Recherches physiques.	CAGNIARD	T	Géophysique appliquée.
GRASSE	T	Evolution des êtres organisés.	CHAMPETIER	T	Chimie macromoléculaire.
PREVOST	T	Chimie organique.	CUVILLIER	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.
BOULIGAND	T	Application de l'analyse à la Géométrie.	JUNG	T	Pétrographie.
CHAUDRON	T	Chimie appliquée.	TRILLAT	T	Chimie Physique.
WYART	T	Minéralogie.	WIEMANN	T	Chimie (P.C.B.).
TEISSIER	T	Zoologie.	JACQUINOT	T	Spectroscopie et Physique céleste.
MANGENOT	T	Biologie végétale.	VASSY		Physique de l'atmosphère.
P. AUGER	T	Physique quantique et relativité.	DESTOUCHES		Théories Physiques.
MONNIER	T	Physiologie des fonctions.	M. PRUVOST	T	Géologie.
PIVETEAU	T	Géologie.	AMIEL	T	Chimie (P.C.B.).
ROCARD	T	Physique (E.N.S.).	HOCART	T	Minéralogie.
H. CARTAN	T	Mathématiques (E.N.S.).	J.P. MATHIEU	T	Physique (P.C.B.).
LAFFITTE	T	Chimie générale.	COUTEAUX	T	Biologie animale (P.C.B.).
FAVARD	T	Mécanique générale.	MAY		Biologie animale (P.C.B.).
COULOMB	T	Physique du Globe.	CHOQUET	T	Calcul différentiel et Intégral.
Melle COUSIN	T	Biologie animale (P.C.B.).	FELDMANN		Biologie (P.C.B.).
CHRETIEN	T	Chimie minérale.	GUINIER	T	Physique (P.C.B.).
P. DRACH	T	Zoologie.	JOST	T	Biologie (P.C.B.).
KASTLER	T	Physique.	FORTET		Calcul des Probabilités.
EPHRUSSI	T	Génétique.	SCHWARTZ	T	Méthode Math. de la Physique.
WURMSER	T	Biologie physico-chimique.	CHOUARD	T	Physiologie végétale.
RIVIERE	T	Géologie (S.P.C.N.).	MALAVARD	T	Aviation.
GAUTHERET	T	Biologie végétale (P.C.B.).	BRELOT	T	Calcul différentiel.
LUCAS	T	Physique.	NORMANT	T	Chimie (P.C.B.).
A. THOMAS	T	Biologie cellulaire.	BENARD		Chimie (P.C.B.).
ARNULF	T	Optique appliquée.	BUVAT		Botanique (E.N.S.).
Max MORAND	T	Physique.	GELOSO		Chimie (P.C.B.).
SOLEILLET	T	Physique.	SOULAIRAC		Psychophysiologie.
FORTIER	T	Mécanique expérimentale des fluides.	ULRICH		Physiologie végétale.
DANJON	T	Astronomie.	MARECHAL	T	Optique théorique et appliquée.
			KIRRMANN	T	Théories chimiques.
			CHADEFAUD		Botanique.
			DESTRIAU		Physique (M.P.C.).
			Melle LE BRETON		Physiologie générale.
			SALEM		Mathématiques générales.

Secrétaire Général CH. MONIER



TABLE DES MATIÈRES

	Pages
SOMMAIRE	3
I - INTRODUCTION	5
1 - DÉFINITION DE LA COUCHE-LIMITE	5
Système des équations de Navier-Stokes; les simplifications de Prandtl; l'aspect des équations simplifiées en régime compressible et en régime incompressible; critique des simplifications.	
2 - ÉPAISSEUR DE LA COUCHE-LIMITE	14
Couche-limite des vitesses et couche-limite des températures; la définition des épaisseurs dites de "quantité de mouvement" et d'"augmentation d'enthalpie", et leur signification.	
3 - POINTS CRITIQUES DE LA COUCHE-LIMITE	16
Point de naissance de la couche-limite et présence éventuelle d'une onde de choc; point de décollement et point de transition; minimum de la pression extérieure.	
II - MÉTHODES UTILISÉES EN RÉGIME INCOMPRESSIBLE	21
1 - SOLUTIONS COMPLÈTES DES ÉQUATIONS DE LA COUCHE-LIMITE	21
Principe d'affinité; solutions de Falkner et Skan, Hartree, Blasius, Hiemenz.	
2 - SOLUTIONS GLOBALES	25
Conditions de von Karman et Wieghardt, méthode de Pohlhausen et de Holstein & Bohlen.	
3 - MÉTHODES D'INTÉGRATION PAS A PAS	29
Méthodes des différences finies d'après Görtler et Schröder.	
4 - TRANSFORMATIONS HODOGRAPHIQUES DE LA COUCHE LIMITE	31
Méthode de R. von Mises.	
III - MÉTHODES DE SOLUTION EN RÉGIME COMPRESSIBLE	33
1 - SOLUTION GLOBALE DU TYPE K. POHLHAUSEN	33
Méthode de Gruschwitz; application et critique.	
2 - MÉTHODE D'INTÉGRATION PAS A PAS	38
Généralités; exposé de la méthode; convergence, exactitude, défauts, résultats.	
3 - TRANSFORMATIONS HODOGRAPHIQUES	64
α) plaque plane. β) pression extérieure quelconque. Exactitude, limites de valabilité, résultats.	
IV - ÉTUDE DES GRANDEURS CARACTÉRISTIQUES pour la détermination de la couche limite laminaire à l'aide de la méthode hodographique du chapitre précédent	77

1 - INFLUENCE DE LA VITESSE ET DU GRADIENT DE VITESSE HORS DE LA COUCHE LIMITE.....	77
2 - INFLUENCE DU COMPORTEMENT THERMIQUE DE LA PAROI DE L'OBSTACLE ... Paroi thermiquement isolée, paroi chauffée ou réfrigérée.	78
3 - INFLUENCE DE LA DISTANCE PARCOURUE LE LONG DE LA PAROI DEPUIS LA NAISSANCE DE LA COUCHE-LIMITE.....	79
V - DÉTERMINATION DES POINTS CRITIQUES.....	81
1 - DÉFINITION ET DÉTERMINATION DU POINT DE DÉCOLLEMENT.....	81
2 - LA TRANSITION.....	82
3 - LE POINT DE NAISSANCE DE LA COUCHE-LIMITE.....	83
VI - COUCHE-LIMITE ET ONDE DE CHOC.....	85
1 - L'ÉCOULEMENT VISQUEUX A LA TÊTE D'UN OBSTACLE..... Caractère des équations de Navier-Stokes avec et sans termes visqueux.	85
2 - MÉTHODE ITÉRATIVE PROPOSÉE PAR R. LEGENDRE..... Exposé et critique; résultats.	87
3 - MÉTHODES NUMÉRIQUES..... Equations complètes de Navier-Stokes dans le cas du problème inverse; méthode de Cabannes en fluide parfait adaptée au cas d'un fluide visqueux; difficultés de principe à cause du caractère du système d'équations employé.	92
VII - ANALYSE MATHÉMATIQUE DES ÉQUATIONS COMPLÈTES DU FLUIDE.	103
1 - LE PROBLÈME DIRECT.....	103
2 - LE PROBLÈME INVERSE..... Problème de Cauchy dans le cas d'un système d'équations non linéaires; le problème de la pose "numériquement correcte" (critique de Hadamard) et critère de Pétrowski; portée du critère de Pétrowski.	104
3 - L'HYPOTHÈSE DE LA CORRÉLATION ENTRE LA FORME PHYSIQUE DE L'ONDE DE CHOC ET DE LA DÉTERMINATION NUMÉRIQUE DE LA SOLUTION.....	107
VIII - CONCLUSION.....	109
IX - ANNEXE : Calcul numérique, feuilles de calcul et résultats numériques de la méthode "étalon" du chapitre III, § 2.....	111
BIBLIOGRAPHIE.....	115
PLANCHES de figures.....	117
FEUILLES DE CALCUL.....	133

SOMMAIRE

La couche-limite laminaire à deux dimensions est, aujourd'hui, un domaine bien connu; en effet, il existe un grand nombre de méthodes de calcul qui permettent sa détermination numérique en s'appuyant sur des bases purement théoriques, mais bien vérifiées par l'expérience.

La plupart des méthodes jusqu'ici connues, cependant, ne conduisent pas à des solutions exactes; les difficultés mathématiques contraignent à l'emploi de méthodes approchées, sauf dans quelques cas particuliers, dont l'intérêt est, en général, faible.

Or, la plupart des méthodes approchées ne permettent pas d'évaluation de l'erreur commise. Pourtant, les résultats des différentes théories concordent assez bien, quoique les hypothèses en soient assez hétérogènes. D'autre part, il reste difficile de pousser la précision – qui ressort de la confrontation de résultats obtenus par des méthodes concurrentes – au delà d'une certaine limite (5% environ pour la détermination des grandeurs locales telles que l'épaisseur de déplacement, le coefficient de frottement à la paroi, etc...).

La multiplicité des méthodes, le paradoxe que constitue l'accord entre les résultats de méthodes souvent discordantes et l'importance de la couche-limite laminaire bidimensionnelle comme base de départ, pour les calculs de la couche-limite turbulente à deux dimensions ainsi que de la couche-limite tridimensionnelle en général, justifient, dans l'état actuel des choses, une analyse plus approfondie.

L'auteur contribue ici à l'étude de deux méthodes, dont l'une permet l'évaluation de l'erreur qu'on y commet, cependant que l'autre fournit des résultats d'une exactitude toujours suffisante par une intégration locale et presque rigoureuse des équations de la couche-limite. Cette dernière méthode est, en plus, la seule à notre connaissance qui n'ait pas de restrictions sur les conditions aux limites admises (comportement thermique à la paroi, variation de la pression extérieure, etc).

Un exemple "étalon" a été choisi qui a permis à l'auteur de confronter, par un calcul numérique dont les résultats sont présentés en annexe, les deux méthodes proposées avec une méthode du type K. POHLHAUSEN, adaptée au cas compressible par E. GRUSCHWITZ.

Le résultat de cette confrontation est satisfaisant; il permet surtout de juger (favorablement) la précision de la méthode basée sur l'intégration locale des équations de la couche-limite. C'est cette méthode qui permet, d'autre part, de discuter de façon particulièrement simple la signification et l'influence des différents points critiques de la couche-limite et, surtout, du point où celle-ci prend naissance.

Il est alors indispensable d'analyser plus particulièrement le domaine autour de ce point, surtout s'il se trouve dans la région située derrière une onde de choc détachée. Deux méthodes

différentes sont proposées : une méthode itérative se basant sur un critère de MOECKEL permettant de calculer approximativement la position et le rayon de courbure d'une onde de choc détachée devant un obstacle, et une autre qui part du système de NAVIER-STOKES non simplifié.

Les difficultés des deux méthodes, et surtout de la seconde, sont analysées. De cette analyse, on peut conclure qu'une solution satisfaisante du problème d'interaction entre une onde de choc et la couche-limite n'est pas encore possible.

Il sera nécessaire d'orienter les futures recherches vers un passage à la limite de faibles valeurs de la viscosité, différent de celui de PRANDTL. Des tentatives dans ce sens ont été entreprises par LAGERSTRÖM et son école, mais les difficultés mathématiques de ces tentatives ne sont pas encore résolues.

En résumé, on peut affirmer que le problème du calcul de la couche-limite laminaire compressible en deux dimensions est résolu pour les écoulements subsoniques où aucune onde de choc n'intervient. En régime supersonique, le cas de l'onde de choc attachée à la pointe de l'obstacle permet une résolution également satisfaisante.

Le problème de l'écoulement visqueux derrière une onde de choc détachée, cependant, n'a pas encore trouvé de solution.

Des méthodes approchées, telles que les a proposées l'auteur, existent certes, mais leur analyse approfondie montre que ce problème dépasse la théorie de la couche-limite.

I - INTRODUCTION.

1. DÉFINITION DE LA COUCHE-LIMITE.

1. Nous considérons, dans ce qui suit, des écoulements stationnaires de fluides visqueux autour d'obstacles qui — en dehors d'une arête éventuelle au bord d'attaque — ont des parois de faible courbure. La notion "faible courbure" sera précisée plus loin. Le fluide est supposé homogène sans surfaces libres, hypothèse qui nous permet de faire abstraction des forces de gravitation et de ne considérer que l'équilibre entre les forces de pression, de frottement et d'inertie.

Nous supposons, de plus, qu'il n'y a pas de phénomènes de choc, dont nous ne parlerons que plus tard (chap. VI).

Suffisamment loin de l'obstacle (à l'"infini amont"), le fluide a une vitesse constante et uniforme U , dont la direction sera choisie comme celle de l'axe x d'un système de coordonnées cartésiennes. L'orientation des axes y et z sera fixée plus tard.

Dans chaque point (x, y, z) de l'espace, l'état du fluide est caractérisé par sept grandeurs, à savoir :

- la composante de la vitesse de l'écoulement en direction de x (u),
- la composante de la vitesse de l'écoulement en direction de y (v),
- la composante de la vitesse de l'écoulement en direction de z (w),
- l'enthalpie (i),
- la pression statique (p),
- la masse spécifique (ρ),
- la viscosité (μ),

Pour la détermination de ces sept grandeurs, il nous faut, par conséquent, sept équations, dont deux sont fournies par les équations d'état pour ρ et μ :

$$\rho = \frac{c_p \cdot p}{r \cdot i};$$

$$\mu = \mu_o \frac{i_o + c_p C}{i + c_p C} \cdot \left(\frac{i}{i_o}\right)^{\frac{3}{2}},$$

dans lesquelles signifient, en plus des inconnues déjà définies,

$r = c_p - c_v$ la constante des gaz,
 c_p chaleur spécifique à pression constante,
 c_v chaleur spécifique à volume constant,
 $C = 1180$ la constante de SUTHERLAND,
 et l'indice 0 un état du fluide quelconque (par exemple à l'infini amont).

Il nous reste donc à trouver cinq autres équations. Ce sont :

A) - Les trois équations du mouvement (NAVIER-STOKES):

$$\begin{aligned}\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \\ \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial y} + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\ \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial z} + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]\end{aligned}$$

B) - L'équation de continuité

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0.$$

C) - L'équation de l'énergie :

$$\rho \left(u \frac{\partial i}{\partial x} + v \frac{\partial i}{\partial y} + w \frac{\partial i}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot u - \frac{\partial p}{\partial y} \cdot v - \frac{\partial p}{\partial z} \cdot w = \phi + \frac{1}{\mathfrak{P}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial i}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial i}{\partial z} \right) \right]$$

avec $\phi = \mu \left[- \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + 2 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right]$

et $\mathfrak{P} = \frac{c_p \mu}{\lambda}$ ("nombre de PRANDTL", supposé constant pour un gaz donné; pour l'air, on a $\mathfrak{P} = 0,725$; λ = coefficient de conductibilité thermique).

Après fixation des conditions aux limites sur la surface de l'obstacle et à l'infini, les sept équations ainsi établies permettraient en principe la détermination complète de l'écoulement.

Il est cependant impossible de traiter rigoureusement ce système.

Nous sommes donc amenés à admettre un certain nombre d'hypothèses simplificatrices pour arriver à une forme plus maniable de nos équations.

Dans ce but, nous nous limiterons, dans ce qui suit, aux écoulements plans, c'est-à-dire nous supposons qu'il existe une direction privilégiée, perpendiculaire à celle de la vitesse à l'infini amont, telle que deux sections parallèles de l'obstacle, normales à cette direction, sont géométriquement égales.

Cette direction privilégiée sera choisie comme direction de z ; l'écoulement sera alors le même dans deux plans parallèles au plan (x, y) . En plus, toutes les lignes de courant sont contenues dans ces plans.

On voit immédiatement que toutes les dérivées par rapport à z s'annulent, ainsi que la composante de la vitesse w .

On trouve alors les équations de l'écoulement plan :

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

$$\rho \left(u \frac{\partial i}{\partial x} + v \frac{\partial i}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial p}{\partial x} u + \frac{\partial p}{\partial y} v \right) = \phi + \frac{1}{\mathfrak{L}^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial i}{\partial y} \right) \right]$$

avec

$$\phi = \mu \left[- \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]$$

$$\rho = \frac{c_p \cdot p}{r \cdot i} \quad \text{et} \quad \mu = \mu_o \frac{i_o + c_p C}{i + c_p C} \cdot \left(\frac{i}{i_o} \right)^{3/2}$$

2. Dans ce système, nous passons à $\mu = 0$. En effet, les valeurs de la viscosité sont tellement faibles qu'on devrait s'attendre à une solution encore bien raisonnable du système.

Cependant, en effectuant ce passage à $\mu = 0$ sans précautions, nous retrouvons les équations des fluides parfaits dont la solution est satisfaisante à une certaine distance (petite) de l'obstacle, mais visiblement fautive à proximité de sa paroi (en effet, elle ne permet pas d'obtenir la condition de non-glissement à la paroi, $u = v = 0$).

Nous sommes donc obligés de chercher un passage à la limite $\mu = 0$ modifié, au moins à proximité de l'obstacle, tout en admettant la solution des fluides parfaits plus loin. C'est ici qu'intervient l'idée de PRANDTL qu'il publia pour la première fois en 1904, à Heidelberg, pour le cas d'un écoulement incompressible, c'est-à-dire à ρ constant et vitesses u et v peu élevées. On déduit de $\rho = (c_p \cdot p)/(r \cdot i)$ que l'enthalpie i est (à une constante multiplicative près) égale à la pression statique qui, en vertu des équations du mouvement lent, varie peu.

On a alors le droit de considérer également μ comme constant. Le système qui détermine u , v , p et i se décompose en un système (équations du mouvement et équation de continuité) pour u , v et p , et une équation pour la détermination de i , $i = (c_p \cdot p)/(r \cdot \rho)$.

Le système traité par PRANDTL a donc la forme

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

ce qui donne, après introduction de grandeurs sans dimension

$$\left(u^* = \frac{u}{U}, \quad v^* = \frac{v}{U}, \quad p^* = \frac{p}{\rho U^2}, \right.$$

$$\left. x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad \mathcal{R} = \frac{\rho L U}{\mu}, \right.$$

L étant une longueur de référence, par exemple la profondeur de l'obstacle) :

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

ou bien, sous forme vectorielle, et en omettant les astérisques :

$$\vec{w} = - \text{grad } p + \frac{1}{R} \Delta \vec{v}$$

$$\text{div } \vec{v} = 0$$

$\vec{v}$ étant le vecteur vitesse, $\vec{w}$ l'accélération.

Cette forme facilite beaucoup la transformation de coordonnées à laquelle nous soumettrons le système :

Soit s la longueur d'arc mesurée dans le plan (x, y) sur la paroi de l'obstacle, à partir de son bord d'attaque, n la longueur d'arc sur les normales à la surface de l'obstacle. Nous introduisons alors deux familles de courbes : l'une est formée des points (x, y) ayant une même distance n de l'obstacle, mesurée sur les normales à la surface, l'autre se compose des normales à la surface de l'obstacle.

Le paramètre de la première famille est n , à $n=0$ correspondant la surface de l'obstacle, celui de la deuxième est s , à $s=0$ correspondant la normale au bord d'attaque (ou, si celui-ci forme une arête, la position limite de cette normale pour $s \rightarrow 0$).

Enfin, nous appelons la longueur d'arc, sur la courbe du paramètre n de la première famille, s_n , en partant de son intersection avec la normale au bord d'attaque.

En passant de s_n à $s_n + ds_n$, le paramètre s augmente de $ds = \frac{r_s}{r_s + n} ds_n$ où r_s représente le rayon de courbure de la surface de l'obstacle correspondant à la valeur s du paramètre.

Les formules bien connues du calcul vectoriel en coordonnées curvilignes permettent alors d'écrire :

$$\begin{aligned} \vec{w} = \vec{v} \text{ grad } \vec{v} = & \left(\frac{r_s}{r_s + n} v_s \frac{\partial v_s}{\partial s} + v_n \frac{\partial v_s}{\partial n} + \frac{v_s v_n}{r_s + n} \right) \vec{i}_s \\ & + \left(\frac{r_s}{r_s + n} v_s \frac{\partial v_n}{\partial s} + v_n \frac{\partial v_n}{\partial n} - \frac{v_s^2}{r_s + n} \right) \vec{i}_n \end{aligned}$$

où dans $\vec{v} = v_s \vec{i}_s + v_n \vec{i}_n$, $\vec{i}_s$ et $\vec{i}_n$ sont les vecteurs unitaires des directions s et n .

$$\begin{aligned} \Delta \vec{v} = \frac{r_s}{r_s + n} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{r_s}{r_s + n} \left(\frac{\partial v_s}{\partial s} + \frac{v_n}{r_s} \right) \right) + \frac{1}{r_s + n} \left(\frac{\partial v_n}{\partial s} - \frac{v_s}{r_s} \right) + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{r_s + n}{r_s} \frac{\partial v_s}{\partial n} \right) \right] \vec{i}_s + \right. \\ \left. + \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{r_s}{r_s + n} \left(\frac{\partial v_n}{\partial s} - \frac{v_s}{r_s} \right) \right) - \frac{1}{r_s + n} \left(\frac{\partial v_s}{\partial s} + \frac{v_n}{r_s} \right) + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{r_s + n}{r_s} \frac{\partial v_n}{\partial n} \right) \right] \vec{i}_n \right\} \end{aligned}$$

$$\text{grad } p = \frac{r_s}{r_s + n} \frac{\partial p}{\partial s} \vec{i}_s + \frac{\partial p}{\partial n} \vec{i}_n$$

$$\text{div } \vec{v} = \frac{r_s}{r_s + n} \left[\frac{\partial v_s}{\partial s} + \frac{r_s + n}{r_s} \frac{\partial v_n}{\partial n} + \frac{v_n}{r_s} \right]$$

Compte tenu de ces expressions, le système

$$\vec{w} = - \text{grad } p + \frac{1}{R} \Delta \vec{v}$$

$$\text{div } \vec{v} = 0$$

devient, en écrivant sa première équation composante par composante :

$$\begin{aligned} \frac{r_s}{r_s + n} v_s \frac{\partial v_s}{\partial s} + v_n \frac{\partial v_s}{\partial n} + \frac{v_s v_n}{r_s + n} = - \frac{r_s}{r_s + n} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{r_s}{r_s + n} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{r_s}{r_s + n} \left(\frac{\partial v_s}{\partial s} + \frac{v_n}{r_s} \right) \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{r_s + n} \left(\frac{\partial v_n}{\partial s} - \frac{v_s}{r_s} \right) + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{r_s + n}{r_s} \frac{\partial v_s}{\partial n} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{r_s}{r_s + n} v_s \frac{\partial v_n}{\partial s} + v_n \frac{\partial v_n}{\partial n} - \frac{v_s^2}{r_s + n} = - \frac{\partial p}{\partial n} + \frac{1}{\mathcal{R}} \frac{r_s}{r_s + n} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{r_s}{r_s + n} \left(\frac{\partial v_n}{\partial s} - \frac{v_s}{r_s} \right) \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{r_s + n} \left(\frac{\partial v_s}{\partial s} + \frac{v_n}{r_s} \right) + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{r_s + n}{r_s} \frac{\partial v_n}{\partial n} \right) \right] \\ \frac{\partial v_s}{\partial s} + \frac{r_s + n}{r_s} \frac{\partial v_n}{\partial n} + \frac{v_n}{r_s} = 0. \end{aligned}$$

Nous avons à considérer ce système pour des valeurs de μ faibles, c'est-à-dire pour $\mathcal{R} \gg 0$. Pour étudier son caractère dans cette hypothèse, nous effectuons le passage $\mathcal{R} \rightarrow 0$. Comme il a déjà été démontré, nous retrouverons ainsi les équations du fluide parfait, si l'on suppose non nulles les valeurs de n , c'est-à-dire la distance de la paroi.

D'après PRANDTL, on se limite alors à une région dont la distance de la paroi sera mesurée par la petitesse de μ même : on pose $n = \frac{\bar{n}}{\sqrt{\mathcal{R}}}$, $\bar{n}$ étant supposé rester fini.

Pour que l'équation de continuité garde alors un sens, nous postulons qu'en même temps v_n se comporte comme $\bar{v}_n / \sqrt{\mathcal{R}}$, $\bar{v}_n$ restant fini. En outre, les termes de la forme $r_s / (r_s + n)$ devant garder une valeur finie et déterminée, nous faisons l'hypothèse, essentielle pour la forme des équations résultant du passage à la limite proposé, que r_s reste différent de zéro et ne dépend pas de $\mathcal{R}$. Cela revient physiquement à demander que la région à laquelle nous nous intéressons (déterminée par l'ordre de grandeur de n) soit partout petite par rapport au rayon de courbure local.

C'est ainsi que doit, dorénavant, être interprétée la notion "faible courbure" dont nous avons fait usage page 5.

Enfin, nous demandons une certaine régularité de la surface du corps que nous exprimons en supposant que pour $\bar{n} \rightarrow 0$, les valeurs de v_s et de $\bar{v}_n$, ainsi que leurs dérivées jusqu'au second ordre, tendent vers des valeurs bien déterminées et finies.

Notre système devient alors, en vertu des hypothèses ci-dessus :

$$\begin{aligned} v_s \frac{\partial v_s}{\partial s} + \bar{v}_n \frac{\partial v_s}{\partial \bar{n}} = - \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial^2 v_s}{\partial \bar{n}^2} \\ \frac{\partial p}{\partial \bar{n}} = 0 \\ \frac{\partial v_s}{\partial s} + \frac{\partial \bar{v}_n}{\partial \bar{n}} = 0. \end{aligned}$$

En revenant des grandeurs non dimensionnelles aux grandeurs physiques, nous pouvons donc affirmer que, à proximité de la paroi de l'obstacle (proximité mesurée par $\mu^{1/2}$), supposée de faible courbure (rayon de courbure de l'ordre de $\mu^{-1/2}$), le système de NAVIER-STOKES se comporte comme

$$\begin{aligned} \rho \left(v_s \frac{\partial v_s}{\partial s} + v_n \frac{\partial v_s}{\partial n} \right) = - \frac{\partial p}{\partial s} + \mu \frac{\partial^2 v_s}{\partial n^2} \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \\ \frac{\partial v_s}{\partial s} + \frac{\partial v_n}{\partial n} = 0. \end{aligned}$$

On voit, en plus, que l'on aurait obtenu le même système directement à partir du système de PRANDTL :

$$\begin{aligned}\rho \left(u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \rho \left(u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

en identifiant x avec s et y avec n .

Nous avons donc le résultat de PRANDTL :

Dans une région dont l'épaisseur est mesurée par $\mu^{1/2}$ ("couche limite") près de la surface d'un obstacle de faible courbure, nous pouvons négliger cette courbure en identifiant la direction de x avec celle de la tangente à la paroi, la direction de y avec celle de la normale. Le comportement de l'écoulement sera alors décrit par le système

$$\begin{aligned}\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

(équations de la "couche-limite"), système dans lequel v est de l'ordre de l'épaisseur de la couche-limite par rapport à u .

Si cette dernière hypothèse est partout satisfaite, l'écoulement s'effectuera en couches approximativement parallèles à la surface de l'obstacle qui ne se mélangeront pratiquement pas. Un tel écoulement sera appelé "laminaire"; nous ne considérons par la suite que des écoulements de ce type.

On voit sur la deuxième des équations de la couche-limite que la pression p n'est fonction que de x seul et identique à la valeur de p donnée par la théorie des fluides parfaits pour $y=0$. On peut donc la supposer donnée comme fonction connue de x , $p=p(x)$, et les équations de la couche-limite se simplifient encore en donnant le système

$$\begin{aligned}\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= - \frac{dp}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

pour u et v .

Ce système est constitué d'une équation du type parabolique, du second ordre en u , et d'une équation du premier ordre en u et v . Comme conditions aux limites, on a :

$$u=v=0 \quad \text{pour} \quad y=0.$$

De plus, on sait que pour $R \rightarrow \infty$ et $\bar{n} \gg 1$, $u \rightarrow u_e(x)$ et $v \rightarrow 0$, $u_e(x)$ étant la distribution des vitesses à la paroi de l'obstacle dans la théorie des fluides parfaits.

Cette deuxième condition étant d'un caractère asymptotique, la valeur de $\bar{n}$ pour laquelle on supposera $u=u_e(x)$ ("frontière de la couche-limite") ne peut être déterminée sans arbitraire, difficulté sur laquelle nous reviendrons encore.

Enfin, étant donné le caractère parabolique de la première des deux équations, nous avons besoin d'une "distribution initiale" pour les valeurs de u , c'est-à-dire d'une fonction de départ $u=u(y)$ pour une valeur donnée $x=x_0$.

Sur la détermination d'une telle distribution initiale et ses difficultés, nous reviendrons au paragraphe 3.

3. Les mêmes considérations pourraient être développées, en principe, également pour le système complet de l'écoulement plan en *régime compressible*. Cependant, la variabilité de μ et ρ complique considérablement le calcul.

En effet, l'expression de ces équations sous une forme invariante nécessite l'emploi du calcul tensoriel.

C'est pourquoi nous introduisons ici le résultat acquis en régime incompressible d'après la déduction de von Mises, sous forme d'hypothèse (cf. CROCCO [1]) :

La courbure de la paroi étant supposée faible par rapport à l'épaisseur de la couche-limite ($r_s/r_s + n \sim 1$ à la précision du calcul), nous négligeons ses effets en identifiant, comme dans le cas incompressible, x à s et y à n .

Nous introduisons, en plus des quantités sans dimension u^* , v^* , x^* , y^* , non changées par rapport au cas incompressible, encore les suivantes :

$$p^* = \frac{P}{\rho_o U^2}, \quad i^* = \frac{i}{U^2}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_o},$$

$$\mu^* = \frac{\mu}{\mu_o}, \quad \mathcal{R} = \frac{\rho_o L U}{\mu_o}.$$

Avec ces définitions, on obtient pour les équations de l'écoulement plan :

$$\rho^* \left(u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) = - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{2}{\mathcal{R}} \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right) - \frac{2}{3\mathcal{R}} \frac{\partial}{\partial x^*} \left[\mu^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{\mathcal{R}} \frac{\partial}{\partial y^*} \left[\mu^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \right]$$

$$\rho^* \left(u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) = - \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{2}{\mathcal{R}} \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\mu^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) - \frac{2}{3\mathcal{R}} \frac{\partial}{\partial y^*} \left[\mu^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{\mathcal{R}} \frac{\partial}{\partial x^*} \left[\mu^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) \right]$$

$$\frac{\partial(\rho^* u^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(\rho^* v^*)}{\partial y^*} = 0$$

$$\rho^* \left(u^* \frac{\partial i^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial i^*}{\partial y^*} \right) - \left(\frac{\partial p^*}{\partial x^*} u^* + \frac{\partial p^*}{\partial y^*} v^* \right) = \frac{1}{\mathcal{R}} \phi^* + \frac{1}{\mathcal{R}} \left[\frac{\partial}{\partial x^*} \left(\mu^* \frac{\partial i^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\mu^* \frac{\partial i^*}{\partial y^*} \right) \right]$$

avec

$$\phi^* = \mu^* \left[-\frac{2}{3} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 + 2 \left(\left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 \right) + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right)^2 \right]$$

$$\rho^* = \frac{c_p p^*}{r i^*} \quad \text{et} \quad \mu^* = \frac{i_o^* + c_p \cdot \frac{C}{U^2}}{i^* + c_p \cdot \frac{C}{U^2}} \cdot \left(\frac{i^*}{i_o^*} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Or, l'enthalpie totale de l'écoulement est donnée par $j = i + u^2/2$, expression dont la variation est négligeable, l'expérience le confirme. Par conséquent, $\partial i^*/\partial x^*$ et $u^* \partial u^*/\partial x^*$ sont du même ordre de grandeur, ainsi que $\partial i^*/\partial y^*$ et $u^* \partial u^*/\partial y^*$. Pour $\mathcal{R} \rightarrow \infty$ et en posant $y^* = \frac{\bar{y}^*}{\sqrt{\mathcal{R}}}$, $v^* = \frac{\bar{v}^*}{\sqrt{\mathcal{R}}}$,

on obtient, au lieu du système des équations de l'écoulement plan comme ci-dessus, le système limite :

$$\begin{aligned}\rho^* \left(u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \bar{v}^* \frac{\partial u^*}{\partial \bar{y}^*} \right) &= - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}^*} \left(\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial \bar{y}^*} \right) \\ \frac{\partial p^*}{\partial \bar{y}^*} &= 0 \\ \frac{\partial(\rho^* u^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(\rho^* \bar{v}^*)}{\partial \bar{y}^*} &= 0 \\ \rho^* \left(u^* \frac{\partial i^*}{\partial x^*} + \bar{v}^* \frac{\partial i^*}{\partial \bar{y}^*} \right) &= \frac{\partial p^*}{\partial x^*} u^* + \frac{\partial p^*}{\partial \bar{y}^*} \bar{v}^* + \mu^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial \bar{y}^*} \right)^2 + \frac{1}{\mathfrak{L}} \frac{\partial}{\partial \bar{y}^*} \left(\mu^* \frac{\partial i^*}{\partial \bar{y}^*} \right)\end{aligned}$$

en u^* , $\bar{v}^*$, p^* et i^* , ρ^* et μ^* étant donnés par les équations de définition

$$\rho^* = \frac{c_p p^*}{r \cdot i^*}, \quad \mu^* = \frac{i_o^* + c_p \frac{C}{U^2}}{i^* + c_p \frac{C}{U^2}} \left(\frac{i^*}{i_o^*} \right)^{3/2}.$$

Le premier résultat que nous tirons de ce système est $\frac{\partial p^*}{\partial \bar{y}^*} = 0$, c'est-à-dire l'indépendance de

p^* de $\bar{y}^*$. On voit que p^* ne dépendant, dans la couche-limite, que de x^* , sera donc égal à la pression pariétale dans l'écoulement extérieur (donc celui défini par le passage $\mathcal{R} \rightarrow \infty$ pour y^* restant fini). On peut, dans l'esprit de la théorie de la couche-limite, considérer p^* comme fonction connue de x^* et ne considérer que les trois équations ci-dessous :

$$\begin{aligned}\rho^* \left(u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \bar{v}^* \frac{\partial u^*}{\partial \bar{y}^*} \right) &= - \frac{dp^*}{dx^*} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}^*} \left(\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial \bar{y}^*} \right) \\ \frac{\partial(\rho^* u^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(\rho^* \bar{v}^*)}{\partial \bar{y}^*} &= 0 \\ \rho^* \left(u^* \frac{\partial i^*}{\partial x^*} + \bar{v}^* \frac{\partial i^*}{\partial \bar{y}^*} \right) &= \frac{dp^*}{dx^*} u^* + \mu^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial \bar{y}^*} \right)^2 + \frac{1}{\mathfrak{L}} \frac{\partial}{\partial \bar{y}^*} \left(\mu^* \frac{\partial i^*}{\partial \bar{y}^*} \right)\end{aligned}$$

Par la combinaison de la première et de la troisième équation, on obtient

$$\begin{aligned}\rho^* \left(u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \bar{v}^* \frac{\partial u^*}{\partial \bar{y}^*} \right) &= - \frac{dp^*}{dx^*} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}^*} \left(\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial \bar{y}^*} \right) \\ \frac{\partial(\rho^* u^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(\rho^* \bar{v}^*)}{\partial \bar{y}^*} &= 0 \\ \rho^* u^* \frac{\partial}{\partial x^*} \left(i^* + \frac{u^{*2}}{2} \right) + \rho^* \bar{v}^* \frac{\partial}{\partial \bar{y}^*} \left(i^* + \frac{u^{*2}}{2} \right) &= \frac{1}{\mathfrak{L}} \frac{\partial}{\partial \bar{y}^*} \left[\mu^* \frac{\partial}{\partial \bar{y}^*} \left(i^* + \mathfrak{L} \frac{u^{*2}}{2} \right) \right]\end{aligned}$$

En revenant enfin aux grandeurs physiques, on trouve le système des équations de la couche-limite en régime compressible, sous la forme

$$\begin{aligned}\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= - \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} &= 0 \\ \rho \left[u \frac{\partial \left(i + \frac{u^2}{2} \right)}{\partial x} + v \frac{\partial \left(i + \frac{u^2}{2} \right)}{\partial y} \right] &= \frac{1}{\mathfrak{L}} \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial}{\partial y} \left(i + \mathfrak{L} \frac{u^2}{2} \right) \right]\end{aligned}$$

Comme dans le cas incompressible, la première des équations est du type parabolique en u ; la troisième est également du type parabolique en $i + u^2/2$; la deuxième n'a pas changé.

Comme conditions aux limites, on trouve $u = v = 0$ pour $y = 0$, $u = u_e(x)$, $v = 0$, $i = i_e(x)$ à la frontière de la couche-limite. Il s'y ajoute une condition sur l'enthalpie à la paroi de l'obstacle, soit de la forme $i = i_p(x)$ (distribution donnée de la température sur la paroi), soit de la forme $\partial i / \partial y = \dot{i}_p(x)$ (gradient de la température donné à la paroi de l'obstacle). La forme classique de cette condition est $\dot{i}_p(x) \equiv 0$ (problème dit du "thermomètre").

Etant donné le caractère parabolique de la première et de la troisième équation, il faut en plus la connaissance d'une distribution initiale $u(y)$ et d'une autre $i(y)$ pour une valeur x_0 donnée, valeurs de "départ".

4. Nous avons vu, dans ce premier paragraphe, deux façons différentes d'effectuer, dans le système des équations de l'écoulement compressible autour d'un obstacle indéfiniment étendu en attaque normale au vent (problème plan), le passage $R \rightarrow \infty$.

À la première façon correspond l'écoulement potentiel autour de l'obstacle, à la deuxième, l'écoulement visqueux à proximité de sa surface, caractérisé par l'absence d'un gradient de pression normal à la paroi et par le fait que la variation des vitesses est faible dans le sens parallèle à la paroi. Or, il existe une autre espèce de phénomènes qui est caractérisée par une variation rapide des vitesses dans le sens parallèle à la paroi, les phénomènes de choc. Le passage à la limite $R \rightarrow \infty$ proposé par PRANDTL n'est donc pas en mesure d'expliquer ces derniers. Ses hypothèses sont même contradictoires à celles valables pour les ondes de choc.

Il est par conséquent aussi impossible de passer de la théorie de PRANDTL à une théorie d'interaction entre ondes de choc et couche-limite qu'il était impossible d'expliquer les phénomènes de la couche-limite elle-même à l'aide d'un passage $R \rightarrow \infty$ tel qu'il figure dans la théorie des écoulements potentiels.

C'est pourquoi la théorie de l'interaction entre les ondes de choc et la couche-limite nécessite un passage à la limite $R \rightarrow \infty$ sui generis, pour lequel n'existent que des premiers pas effectués par LAGERSTRÖM [2] et son école.

2. ÉPAISSEUR DE LA COUCHE-LIMITE.

1. Pour la solution des équations de la couche-limite, il est nécessaire de connaître les conditions aux limites aussi bien à la paroi qu'à la frontière de l'écoulement à potentiel. Or, comme nous l'avons déjà vu, ce deuxième passage s'effectue de façon asymptotique telle qu'il est impossible de déterminer une ligne précise sur laquelle les conditions ($u = u_e(x)$, $v = 0$, $i = i_e(x)$, $p = p(x)$) doivent être vérifiées.

En effet, cette difficulté est sérieuse. Le système des équations de la couche-limite n'est valable qu'asymptotiquement, lui aussi, pour $R \rightarrow \infty$. Mais, en effectuant ce passage, on s'aperçoit que l'épaisseur de la couche-limite, de l'ordre de $1/\sqrt{R}$ tend vers zéro. C'est d'ailleurs la raison qui nous a permis de choisir les valeurs de l'écoulement potentiel à la paroi comme valeurs limites à la frontière extérieure de la couche-limite.

D'autre part, la valeur de R est une donnée du problème; bien que très grande, elle est loin d'être infinie. Par conséquent, le domaine de validité des équations de PRANDTL a une épaisseur, certes, petite mais finie. Seulement, à une distance finie de la paroi, les valeurs de l'écoulement potentiel ne sont plus celles de la paroi. Nous reviendrons à cette dernière difficulté.

Couramment, on a recours à deux solutions qui tiennent compte du fait que le passage aux valeurs de l'écoulement potentiel à la paroi s'effectue asymptotiquement :

On écrit, comme nous l'avons fait page , les équations de la couche-limite dans le système de coordonnées transformées, x^* et $\bar{y}^* = \frac{y}{L} \sqrt{R}$, et l'on situe la frontière de la couche-limite - en vue du passage $\sqrt{R} \rightarrow \infty$ - à $\bar{y}^* = \infty$.

On peut alors résoudre les équations, soit en posant

$$\lim_{\bar{y}^* \rightarrow \infty} u^* = u_e^*, \quad \lim_{\bar{y}^* \rightarrow \infty} i^* = i_e^*, \quad \lim_{\bar{y}^* \rightarrow \infty} v^* = 0, \quad \lim_{\bar{y}^* \rightarrow \infty} p^* = p_e^*$$

soit en remplaçant les deux premières conditions du raccordement asymptotique par les suivantes :

$$\lim_{\bar{y}^* \rightarrow \infty} \dot{u}^* = 0, \quad \lim_{\bar{y}^* \rightarrow \infty} \dot{i}^* = 0$$

(le point indiquant la dérivation par rapport à $\bar{y}^*$).

Dans les deux cas, on obtiendra une solution qui présentera u^* et i^* en fonction de $\bar{y}^*$ (pour chaque $x^* = x_0^*$).

Pour revenir à la coordonnée physique y , les valeurs de $\bar{y}^*$ doivent être multipliées par le facteur (très petit, mais non nul) $L/\sqrt{R}$.

On fixe alors la frontière de la couche-limite à la valeur $\bar{\delta}^*$ pour laquelle les valeurs de u^* et de i^* atteignent à 1% près leurs valeurs dans l'écoulement potentiel à la paroi. La transformée $\bar{\delta}^* \frac{L}{\sqrt{R}} = \delta$ est appelée "épaisseur de la couche-limite".

Cette solution est (relativement) satisfaisante seulement en régime incompressible, où $i = \frac{c_p \cdot p}{r \cdot \rho}$ est, à cause de la constance de ρ , proportionnel à p qui de son côté n'est fonction que de x seul.

En effet, en régime compressible, l'allure des courbes $u(y, x_0)$ et $i(y, x_0)$ n'est pas la même. Par conséquent, la méthode proposée ne conduit pas à une épaisseur unique de la couche-limite, mais elle en fournit deux : l'épaisseur de la "couche-limite des vitesses" et l'épaisseur de la "couche-limite thermique", conception couramment admise mais gênante quand on pense que le système des équations de la couche-limite forme un système (au moins en régime compressible) inséparable et par conséquent valable dans le même domaine.

Une difficulté analogue se présente d'ailleurs pour la distribution initiale; nous y reviendrons dans le paragraphe 3 et dans le chapitre III.

La double difficulté créée par la définition peu précise d'une épaisseur de la couche-limite d'un côté et l'impossibilité d'un autre côté de déterminer exactement les valeurs de l'écoulement extérieur à utiliser a suscité différentes tentatives d'amélioration de la théorie.

2. Dans l'hypothèse que le rayon de courbure de la paroi de l'obstacle est grand vis-à-vis de l'épaisseur de la couche-limite, nous pouvons affirmer que la vitesse de l'écoulement potentiel à la frontière de la couche-limite ne s'écarte pas considérablement de sa valeur pariétale u_e . De même, sa masse spécifique ρ_e reste sensiblement la même.

Entre $y = 0$ et une valeur y à l'intérieur de la couche-limite, l'écoulement potentiel débite, par unité de temps, une quantité de fluide égale à $\int_0^y \rho_e u_e dy$.

Dans la véritable couche-limite, le débit entre les mêmes limites en y est $\int_0^y \rho u dy$.

La différence $\int_0^y (\rho_e u_e - \rho u) dy$ entre ces deux débits est la quantité du fluide repoussée dans l'unité du temps, vers l'extérieur de la couche-limite.

Au total, cette quantité est alors $\int_0^\delta (\rho_e u_e - \rho u) dy$ (ou bien, parce que au-delà de δ , u est sensiblement la vitesse de l'écoulement potentiel et que, par conséquent, la parenthèse disparaît pour $y > \delta$) $= \int_0^\infty (\rho_e u_e - \rho u) dy$ où u et ρ ont été calculés asymptotiquement pour $y \rightarrow \infty$ et $u \rightarrow u_e$.

Or, cette quantité repoussée vers l'extérieur a pris (ou plutôt conservé) la vitesse u_e de l'écoulement extérieur. Elle occupe, par conséquent, un domaine dont la largeur est

$$\delta_d = \frac{1}{\rho_e u_e} \int_0^\infty (\rho_e u_e - \rho u) dy$$

Cette valeur donne, en d'autres termes, une mesure du déplacement des lignes de courant de l'écoulement potentiel sous l'influence de la formation de la couche-limite, c'est-à-dire l'augmentation apparente de l'épaisseur de l'obstacle sous l'effet de la viscosité.

On appelle alors δ_d "l'épaisseur de déplacement".

Le nouvel obstacle, formé de l'obstacle original épaissi de la valeur de δ_d peut être alors pris comme base de départ pour un nouveau calcul de l'écoulement potentiel, calcul qui tient déjà compte de la présence de la couche-limite. On recommencera après, avec la vitesse pariétale ainsi obtenue, un nouveau calcul asymptotique de la couche-limite, et —de façon itérative— d'une nouvelle épaisseur de déplacement.

Cependant, l'expérience numérique a montré que déjà la première valeur

$$\delta_d = \frac{1}{\rho_e u_e} \int_0^\infty (\rho_e u_e - \rho u) dy$$

est suffisamment approchée. De plus, sa valeur numérique est en général inférieure à celle de l'épaisseur δ , déterminée par la condition des 99% de vitesse. Par conséquent, la valeur de u_e , calculée une fois pour l'obstacle même, une autre fois pour l'obstacle épaissi de δ_d , reste pratiquement la même.

On peut donc se limiter à considérer u_e comme vitesse limite pour $y \rightarrow \infty$, et à calculer l'épaisseur de déplacement sans itération.

Ainsi, la valeur de δ_d fournit une grandeur d'une signification physique immédiate dont la définition n'est pas affectée du même arbitraire que δ .

Le fait que la couche-limite n'a pas de frontière bien déterminée et qu'il faut, par conséquent, considérer —au moins en principe— tout le domaine $0 \leq y < \infty$ a conduit à deux autres méthodes de calcul de la couche-limite, méthodes qui s'inspirent de la manière dont a été définie l'épaisseur de déplacement : ce sont les méthodes intégrales qui partent soit d'un bilan de la quantité de mouvement dans la couche-limite (méthode de von KARMAN-GRUSCHWITZ-POHLHAUSEN), soit du bilan de l'énergie (WALZ).

Dans le premier cas, on considère la perte de quantité de mouvement à travers la couche-limite :

En effet, la quantité du fluide qui passe dans l'unité de temps dans une section dy de la couche-limite est donnée par $\rho u dy$. Sa quantité de mouvement est $\rho u^2 dy$. Le même débit aurait, dans l'écoulement potentiel, la vitesse u_e , sa quantité du mouvement serait donc $\rho u u_e dy$. La perte de quantité du mouvement due à la présence de la couche-limite est alors

$$\int_0^\infty \rho u (u_e - u) dy.$$

Cette quantité est représentée, dans l'écoulement potentiel, par une couche du fluide d'épaisseur δ_2 , telle que :

$$\rho_e u_e^2 \delta_2 = \int_0^\infty \rho u (u_e - u) dy.$$

De cette relation, on tire la définition de l'épaisseur de perte de quantité du mouvement :

$$\delta_2 = \int_0^{\infty} \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy.$$

Dans le deuxième cas, on considère la variation de l'énergie thermique due à la couche-limite :

En effet, l'énergie thermique de la quantité de fluide passant dans l'unité du temps par une section dy de la couche-limite est

$$\rho u dy \cdot i$$

La même quantité aurait, dans l'écoulement potentiel, l'énergie thermique $\rho u dy \cdot i_e$; leur différence, intégrée à travers la couche-limite, est l'augmentation de l'énergie thermique due à la présence de la couche-limite :

$$\int_0^{\infty} \rho u (i - i_e) dy.$$

Elle correspond à l'énergie thermique contenue dans l'écoulement potentiel, dans une nappe du fluide d'épaisseur δ_t , telle que $\rho_e u_e i_e \delta_t = \int_0^{\infty} \rho u (i - i_e) dy$, d'où :

$$\delta_t = \int_0^{\infty} \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(\frac{i}{i_e} - 1\right) dy;$$

δ_t est l' "épaisseur d'enthalpie ".

Enfin, on peut encore définir l' "épaisseur de perte de vitesse " :

$$\delta_v = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy$$

qui, en régime incompressible, se confond avec l'épaisseur de déplacement

$$\delta_d = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\right) dy$$

puisque alors $\rho = \rho_e$.

Dans le cas de conditions thermiques à la paroi comparables, conditions qui sont satisfaites pour une paroi athermane, on peut interpréter la différence $\delta_d - \delta_v$ comme l'élargissement de la couche-limite sous l'influence de la compressibilité. Or,

$$\delta_d - \delta_v = \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{u_e} - \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\right) dy = \int_0^{\infty} \frac{u}{\rho_e u_e} (\rho_e - \rho) dy = \int_0^{\infty} \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(\frac{\rho_e}{\rho} - 1\right) dy.$$

Puisque nous sommes à l'intérieur de la couche-limite, donc à pression constante, nous avons $\frac{\rho_e}{\rho} = \frac{i}{i_e}$, et alors

$$\delta_d - \delta_v = \int_0^{\infty} \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(\frac{i}{i_e} - 1\right) dy = \delta_t$$

Nous avons donc le résultat important :

Quand le flux de chaleur à la paroi est nul, c'est l'épaisseur d'enthalpie δ_t qui mesure l'élargissement de la couche-limite sous l'influence de la compressibilité.

3. POINTS CRITIQUES DE LA COUCHE-LIMITE.

1. Après l'examen des conditions aux limites à la paroi de l'obstacle et à la frontière extérieure de la couche-limite, qui nous a conduit à la définition des différentes épaisseurs utilisées

dans la théorie de la couche-limite, nous revenons à la nécessité — due à la forme parabolique des équations aux dérivées partielles pour u et i — de connaître une distribution initiale des vitesses et des températures.

En général, cette condition initiale doit se trouver dans le voisinage du bord d'attaque, c'est-à-dire pour $x \sim 0$.

Mais malheureusement ce point de naissance de la couche-limite est singulier à plusieurs égards :

Tout d'abord, il faut considérer deux formes possibles du bord d'attaque : bord d'attaque arrondi et bord d'attaque pointu.

Dans le premier de ces cas, nous sommes en présence d'un point d'arrêt, donc d'une vitesse extérieure (pariétale de l'écoulement potentiel) égale à zéro.

Dans le deuxième cas, la vitesse extérieure sera différente de zéro, mais l'épaisseur de la couche-limite sera néanmoins nulle.

Dans les deux cas, il est donc assez difficile de parler d'une "distribution initiale" des vitesses (et au moins dans le deuxième cas, aussi de la température).

Mais, de plus, le système des équations de la couche-limite lui-même cesse d'être valable. Nous avons, en effet, supposé lors de l'établissement de ces équations que $u \partial u / \partial x$ et $v \partial u / \partial y$ ainsi que $\partial^2 u / \partial y^2$ sont grands par rapport à $1 / \sqrt{R}$, ce qui n'est pas le cas dans le voisinage d'un point d'arrêt. Dans le voisinage d'un bord d'attaque pointu, on a $\partial u / \partial x \sim 0$ et $\partial p / \partial x \sim 0$; de plus, on a $v \sim 0$ et par conséquent aussi $\partial^2 u / \partial y^2 \sim 0$.

On n'a donc plus le droit de négliger les termes en $1 / \sqrt{R}$.

Il paraît alors malaisé de faire l'hypothèse qu'une extrapolation vers $x = 0$, soit de la fonction de la distribution des vitesses en fonction de y dans la couche-limite, soit de la forme des équations de la couche-limite, conduise à des résultats physiquement raisonnables.

C'est cependant cette double hypothèse qui est à la base de la plupart des méthodes de résolution des équations de la couche-limite. Nous y reviendrons à plusieurs reprises; la méthode proposée par l'auteur chapitre III, paragraphe 3, est à notre connaissance la seule qui fasse abstraction de cette hypothèse.

2. Dans le cas où la vitesse U à l'infini amont est supersonique, il y a une autre difficulté pour la détermination de la couche-limite près du bord d'attaque : la présence d'une onde de choc (détachée ou attachée) devant l'obstacle.

L'éventualité la moins gênante est celle du choc attaché que l'on peut considérer comme étant sans courbure, au moins à proximité du bord d'attaque où l'on peut confondre l'obstacle avec sa tangente à la pointe. La présence du choc n'a donc pas d'autre effet dans le calcul de la couche-limite que de substituer à la vitesse uniforme à l'infini amont la vitesse uniforme après le choc. De même, la température de l'écoulement à l'infini amont est remplacée par celle que l'on obtient par le calcul immédiatement derrière le choc.

La présence d'une onde de choc détachée devant un obstacle à bord d'attaque arrondi rend, en principe, impossible l'application de la théorie de la couche-limite : en effet, l'écoulement derrière le choc n'est plus irrotationnel; une des hypothèses fondamentales (la présence d'un écoulement potentiel autour de l'obstacle à l'extérieur de la couche-limite) est alors en défaut.

Puisque — comme nous l'avons déjà mentionné plus haut, paragraphe 1 — les hypothèses pour le traitement des ondes de choc ne sont pas compatibles avec celles de la couche-limite, nous sommes obligés d'avoir recours à une théorie nouvelle, ou, à défaut, de considérer les équations de NAVIER-STOKES de l'énergie et de continuité sans simplification.

Cette dernière éventualité sera envisagée avec les difficultés de principe qu'elle entraînera dans les chapitres VI et VII.

Dans tous les autres chapitres, il sera par conséquent tacitement supposé qu'il n'y a pas d'onde de choc devant l'obstacle, ou que l'on peut faire abstraction de sa présence en extrapolant l'état du fluide derrière l'onde (si elle est attachée) vers l'infini amont.

3. Jusqu'ici nous avons considéré l'influence des conditions aux limites et des conditions initiales pour les inconnues u , v et i . Mais il reste encore une quatrième inconnue, la pression statique dans le fluide p , qui en vertu des simplifications de PRANDTL a été réduite à une donnée du problème, la pression $p(x)$ dans l'écoulement extérieur.

Mathématiquement, cette "donnée" joue cependant toujours le rôle d'une condition aux limites cachées dont l'influence sur l'écoulement dans la couche-limite est importante.

En effet, $-dp/dx$ étant la force qui agit sur l'unité de volume du fluide, une particule du fluide se trouve accélérée aussi longtemps que p décroît en fonction de x .

S'il existe un minimum de pression, son franchissement change l'accélération de la particule en décélération, elle est freinée. Or, par suite de l'équation $\partial p / \partial y = 0$, cette décélération est fonction uniquement de x et a donc la même valeur dans les parties de la couche-limite près de la paroi et loin de celle-ci.

D'autre part, l'énergie cinétique d'une particule tend vers zéro quand on s'approche de la paroi. Il se trouvera, par conséquent, après le minimum de la pression un point x_d , où l'écoulement dans la couche-limite change, près de la paroi, de direction sous l'influence du gradient de la pression. A ce point x_d , on a $u = 0$ à proximité de la paroi, ce qui conduit à $\partial u / \partial y = 0$ à la paroi même. De plus, la composante u de la vitesse étant nulle, il ne reste que la composante v , dirigée vers l'extérieur : l'écoulement dans la couche-limite "décolle" de la paroi de l'obstacle. Le point x_d , caractérisé par la condition $(\partial u / \partial y)_p = 0$, est appelé "point de décollement" de la couche-limite.

Le décollement est donc caractérisé par le fait que les vitesses u deviennent très petites cependant que les composantes v normales à la paroi de l'obstacle deviennent prépondérantes, en contradiction avec les hypothèses de base discutées dans le paragraphe 1 (cf. p. 10).

A l'approche du point de décollement, les équations de la couche-limite cessent donc également d'être valables.

4. Cependant, en général, ce "décollement laminaire" n'a même pas lieu. En effet, on arrive à une autre difficulté pour l'interprétation des hypothèses de la couche-limite : le passage $R \rightarrow \infty$ perd son sens d'idéalisation déjà avant le décollement par le fait que l'hypothèse de la petitesse de la composante v par rapport à u n'est plus vérifiée si R dépasse une valeur critique, au delà de laquelle on peut démontrer que de petites perturbations ne s'amortissent plus. L'écoulement devient turbulent.

On se trouve alors vis-à-vis du paradoxe suivant : les équations de la couche-limite ne sont valables que pour un écoulement dont le nombre de Reynolds est suffisamment élevé ; d'autre part, pour un nombre de Reynolds dépassant une certaine valeur critique, un écoulement aux faibles vitesses normales à la paroi de l'obstacle n'est plus possible.

La "couche-limite laminaire" (c'est-à-dire constituée de couches parallèles à la surface du corps qui, à cause des valeurs de v faibles par rapport à u , ne se mélangent pratiquement pas) est donc une idéalisation assez délicate des écoulements réels, valable dans un domaine de nombres de Reynolds ni trop petits, ni trop grands.

Notons encore que, pour le passage à la limite $R \rightarrow \infty$, le nombre de Reynolds avait été formé avec la vitesse à l'infini amont, la viscosité et la densité correspondante, et une longueur L macroscopique.

Quand on considère la stabilité de l'écoulement, il faut naturellement se reporter à un nombre de Reynolds local, c'est-à-dire formé avec les valeurs caractéristiques locales, vitesse extérieure $u_e(x)$, viscosité et densité de l'écoulement extérieur pour la valeur de x considérée, et épaisseur locale de la couche-limite comme longueur.

Le point où ce nombre de Reynolds local dépasse la valeur critique amène en général la transition à une couche-limite turbulente qui n'est plus régie par les équations ici considérées. On appelle ce point qui se situe en général avant le point de décollement "point de transition".

Dans l'esprit d'une théorie qui implique le passage $R \rightarrow \infty$, nous le négligeons systématiquement dans ce qui suit pour calculer une couche-limite laminaire hypothétique (et souvent irréalisable à partir d'un certain point dont la détermination exacte par la théorie n'est pas encore possible) qui va toujours jusqu'au décollement laminaire. Ceci n'est pas inutile. En effet, le calcul (encore semi-empirique) de la couche-limite turbulente part des valeurs fournies par la théorie de la couche-limite laminaire pour le point de transition. Ce dernier étant souvent susceptible seulement d'une détermination expérimentale, il est important de posséder les valeurs laminaires jusqu'au décollement.



II - MÉTHODES UTILISÉES EN RÉGIME INCOMPRESSIBLE.

1. SOLUTIONS COMPLÈTES DES ÉQUATIONS DE LA COUCHE-LIMITE.

1. Le système des équations de la couche-limite en régime incompressible peut être mis, en posant $\frac{\mu}{\rho} = \nu$ et à l'aide de l'équation de BERNOLLI $-\frac{dp}{dx} = \rho u_e \frac{du_e}{dx}$ pour ρ constant, sous la forme

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{du_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

avec les conditions aux limites $u_p \equiv v_p \equiv 0$, $\lim_{y \rightarrow \infty} u = u_e(x)$ et $u = U$ à l'infini amont.

En vue des difficultés déjà discutées de déterminer un "profil initial" par une extrapolation (en elle-même douteuse) des équations ci-dessus lorsque $x \rightarrow 0$, nous nous demandons d'abord s'il n'existe pas de solutions qui soient, à un facteur de proportionnalité près en u et y , les mêmes pour tous les x (et par conséquent, par extension, aussi pour $x = 0$).

En d'autres termes, si $u = u(x, y)$, nous cherchons si la condition

$$\frac{u\left(x_1, \frac{y}{g(x_1)}\right)}{u_e(x_1)} = \frac{u\left(x_2, \frac{y}{g(x_2)}\right)}{u_e(x_2)}$$

peut être satisfaite pour n'importe quel couple x_1 et x_2 de valeurs de l'abscisse.

La répartition (ou profils) $u(x_1, y)$ et $u(x_2, y)$ des vitesses dans la couche-limite en fonction de y qui satisfont à cette condition sont dites "profils affins", et le principe qui nous permet de tourner ainsi la difficulté de la détermination d'un profil initial, "principe d'affinité"

Nous introduisons une fonction de courant $\psi(x, y)$ qui satisfait

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

l'équation de la continuité, et donne à la première équation la forme

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = u_e \frac{du_e}{dx} + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_p = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_p = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial \psi}{\partial y} = u_e(x).$$

Nous retournons aux grandeurs non dimensionnelles

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad \mathcal{R} = \frac{UL}{\nu}, \quad \eta = y^* \frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{g(x^*)} \quad \text{avec} \quad y^* = \frac{y}{L}$$

où $g(x^*)$ est un facteur sans dimension. Enfin, nous posons :

$$f(x^*, \eta) = \psi^*(x^*, y^*) \frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{g(x^*)}$$

avec $\psi^*(x^*, y^*) = \frac{\psi(x, y)}{L \cdot u_e(x)}$; nous simplifions encore l'écriture en écrivant ξ au lieu de x^* .

Pour la composante u de la vitesse, on trouve alors :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = u_e \frac{\partial f}{\partial \eta}.$$

Le principe d'affinité sera alors satisfait si $\frac{\partial f}{\partial \eta}$ est fonction de η seul, ce qui revient, par suite à la condition $v(x, 0) = 0$, à écrire que f ne dépend que de η .

On posera donc : $\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{df}{d\eta} = f'$ et $\frac{\partial f}{\partial \xi} = 0$.

L'équation du mouvement devient alors

$$f''' + c_1 f f'' + c_2 (1 - f'^2) = \frac{u_e}{U} g^2 \left(f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) = 0$$

avec :

$$c_1 = \frac{Lg}{U} \frac{d}{dx} (u_e g)$$

$$c_2 = \frac{L}{U} g^2 \frac{du_e}{dx}.$$

Or, une telle équation n'a de sens que si c_1 et c_2 ne dépendent plus de x , c'est-à-dire se réduisent à des constantes, ce qui entraîne pour u_e et g :

$$\frac{u_e}{U} = K^{\frac{2}{2c_1 - c_2}} \cdot \left[(2c_1 - c_2) \frac{x}{L} \right]^{\frac{c_2}{2c_1 - c_2}}$$

$$g = \sqrt{(2c_1 - c_2) \frac{x}{L}} \cdot \sqrt{\frac{U}{u_e}}$$

avec $2c_1 - c_2 \neq 0$, K étant une constante.

On voit alors, sur la définition de c_1 et c_2 qu'un facteur commun peut être englobé dans un g modifié.

Si nous posons (avec la restriction $c_1 \neq 0$) :

$$c_1 = 1$$

$$c_2 = \frac{2m}{m+1}$$

d'où

$$\frac{u_e}{U} = K^{1+m} \left(\frac{2}{1+m} \frac{x}{L} \right)^m$$

$$g = \sqrt{\frac{2}{1+m} \frac{x}{L} \frac{U}{u_e}}$$

et par conséquent,

$$\eta = \gamma \sqrt{\frac{1+m}{2} \frac{U}{\nu x}},$$

il en résulte que le principe d'affinité est valable pour les écoulements de la forme

$$u_e = C x^m.$$

Il s'agit des écoulements potentiels dans le voisinage du point d'arrêt d'un coin dont l'angle d'ouverture est $\pi\beta$ avec

$$\beta = c_2 = \frac{2m}{m+1}.$$

Pour $m = 0$, nous nous trouvons dans le cas de la plaque plane, avec $u_e(x) = U$ et $dp/dx = 0$; pour $m = 1$, nous avons $u_e(x) = ax$; c'est le cas limite d'un écoulement uniforme s'écrasant sur une plaque verticale à l'écoulement. On connaît d'ailleurs, pour ce dernier cas, la solution exacte des équations de NAVIER-STOKES.

On pourrait arriver à des solutions affines, également en traitant les cas $c_1 = 0$ et $2c_1 - c_2$, ici exclus. Mais les solutions correspondantes ne nous intéressent pas ici. La recherche des solutions affines revient donc à l'intégration de l'équation différentielle obtenue précédemment pour la fonction f , au lieu de l'équation aux dérivées partielles pour u . Il est donc possible dans ce procédé de se passer d'une distribution initiale et de calculer directement, pour chaque $x = x_0$ donné, le profil des vitesses cherché.

Cette observation, appliquée aux équations de la couche-limite compressible, soumises à la transformation de CROCCO, nous permettra par la suite d'établir une méthode générale permettant également une intégration (approchée) locale de ces équations. Nous y reviendrons dans le chapitre III, paragraphe 3.

De plus, la connaissance des solutions affines permet une détermination approximative mais satisfaisante des conditions initiales dans le cas général. Nous en parlerons dans le paragraphe 3 ainsi que dans le chapitre III, paragraphe 2.

2. Dans le cas $u_e = Cx^m$ que nous analysons ici, l'équation différentielle pour f s'écrit :

$$f''' + ff'' + \frac{2m}{m+1} (1 - f'^2) = 0$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = 1.$$

Cette équation a été établie, pour la première fois, par FALKNER & SKAN. Les solutions ont été données, pour plusieurs valeurs de m , par HARTREE. Nous en reproduisons quelques-unes pour les valeurs $0 < m < 1$, dans la figure 1, dont les courbes nous serviront encore dans les paragraphes suivants.

L'importance de l'équation différentielle pour f ne se limite pas au cas des solutions affines. En effet, l'équation qui correspond à $m = 1$,

$$f''' + ff'' + (1 - f'^2) = 0,$$

connue sous le nom d'"équation de BLASIUS", joue un rôle dans une autre classe de problèmes donnant la solution des équations de la couche-limite, près d'un point d'arrêt - pour bord d'attaque arrondi cette fois - sans connaissance préalable d'une condition initiale.

Il s'agit du cas d'un cylindre infini dont l'axe est perpendiculaire à la direction du vent, et dont le contour est symétrique par rapport à un axe parallèle au vent.

La vitesse de l'écoulement potentiel pariétal $u_e(x)$ est supposée connue et donnée sous forme d'une série de puissances de x , distance au point d'arrêt mesurée le long du contour. Le fait qu'on désire un développement qui converge rapidement oblige cependant de se restreindre, surtout pour les obstacles minces, à un domaine très limité autour du point d'arrêt (bord d'attaque arrondi).

$$\text{Soit } u_e(x) = u_1 x + u_3 x^3 + u_5 x^5 + \dots$$

ce développement dont les coefficients ne dépendent que de la forme de l'obstacle.

Pour le terme $u_e \frac{du_e}{dx}$ dans l'équation du mouvement, on trouve alors :

$$u_e \frac{du_e}{dx} = u_1^2 x + 4 u_1 u_3 x^3 + (6 u_1 u_5 + 3 u_3^2) x^5 + \dots$$

Nous intégrons, comme pour les solutions affines, l'équation de continuité en introduisant la fonction de courant

$$\psi(x_1, y) = c_1(y) \cdot x + c_3(y) \cdot x^3 + c_5(y) \cdot x^5 + \dots$$

dont nous essayons de déterminer les coefficients de façon générale, indépendants du choix des coefficients $u_1, u_3, u_5, \dots$. La forme du terme $u_e \frac{du_e}{dx}$ nous le permet en posant d'une façon absolument analogue, après introduction de la variable non dimensionnelle $\eta = y \sqrt{\frac{u_1}{\nu}}$:

$$\psi(x_1 \eta) = \sqrt{\frac{\nu}{u_1}} \left[u_1 x f_1(\eta) + 4 u_3 x^3 f_3(\eta) + (6 u_5 x^5 g_5(\eta) + 3 \frac{u_3^2}{u_1} h_5(\eta)) x^5 + \dots \right]$$

La substitution de ψ et de $u_e \frac{du_e}{dx}$ dans l'équation du mouvement donne, après identification des coefficients des puissances de x , le système suivant d'équations différentielles ordinaires :

$$\begin{aligned} f_1'^2 - f_1 f_1'' &= 1 + f_1''' \\ 4 f_1' f_3' - 3 f_1'' f_3 - f_1 f_3'' &= 1 + f_3''' \\ 6 f_1' g_5' - 5 f_1'' g_5 - f_1 g_5'' &= 1 + g_5''' \\ 3 f_1' h_5' - \frac{5}{2} f_1'' h_5 - \frac{1}{2} f_1 h_5'' &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} h_5' - 8(f_3'^2 - f_3 f_3'') \\ &\dots \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites ci-après :

$$\begin{aligned} \eta = 0 : \quad & f_1 = f_1' = 0 \quad f_3 = f_3' = 0 \quad g_5 = g_5' = 0 \quad h_5 = h_5' = 0, \dots \\ \eta = \infty : \quad & f_1' = 1 \quad f_3' = \frac{1}{4} \quad g_5' = \frac{1}{6} \quad h_5' = 0, \dots \end{aligned}$$

Ce système peut être résolu de proche en proche; de plus, toutes les équations sont des équations linéaires, sauf la première qui est cependant déjà connue : c'est l'équation de FALKNER & SKAN pour $m = 1$.

Ce résultat n'est d'ailleurs aucunement étonnant puisque l'écoulement près du point d'arrêt d'un obstacle à bord d'attaque arrondi doit être, en première approximation et dans un domaine infinitésimal autour de ce point, celui d'un écoulement uniforme s'écrasant sur une plaque verticale à l'écoulement. Il nous permet d'ailleurs de déterminer immédiatement la solution de la seule équation non linéaire du système et de procéder alors à la résolution des autres équations.

Ce procédé, conçu par BLASIUS, a été numériquement appliqué par HIEMENZ qui a fourni des tables pour f_1 et f_3 .

Les résultats du calcul, confrontés pour le cylindre circulaire à ceux de l'expérience (HIEMENZ), donnent (en employant une fonction de pression mesurée et non calculée) la position du point de décollement le long du profil avec une erreur très faible (82° au lieu de 81°).

Les méthodes de FALKNER & SKAN dans le cas du coin, de BLASIUS dans le cas du cylindre, ont – outre leur intérêt particulier de fournir des solutions complètes *localement* calculables – une importance fondamentale pour ce qui suit :

En effet, il est toujours possible d'identifier – avec une précision qui ne dépend que de l'étendue du domaine dans lequel on utilise cette identification – le commencement d'un obstacle à bord d'attaque pointu à un coin, le commencement d'un obstacle à bord d'attaque arrondi à un cylindre.

La solution fournie par ces méthodes peut être alors choisie comme distribution initiale pour une solution des équations aux dérivées partielles de la couche-limite dans le cas général.

Ce procédé a été utilisé, notamment, dans la méthode proposée par l'auteur pour la résolution des équations de la couche-limite en régime compressible, chapitre III, paragraphe 2.

Il reste à signaler que, pour ne pas alourdir la rédaction de ce paragraphe, nous nous sommes bornés au cas symétrique mais que, bien entendu, le cas asymétrique peut être traité d'une façon analogue comme l'a démontré L. HOWARTH [3].

2. SOLUTIONS GLOBALES.

1. Dans la plupart des cas d'intérêt pratique, la connaissance détaillée de la solution des équations de la couche limite n'est pas nécessaire. En effet, on s'intéresse plus particulièrement au calcul du frottement pour lequel il suffit de connaître le coefficient de tension tangentielle à la paroi donné à un facteur près par le quotient $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_p$; au point de décollement de la

couche-limite déterminé par la condition $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_p = 0$; et à l'épaisseur de la couche-limite qui donne une mesure de l'épaississement de l'obstacle, utile par exemple dans le calcul de la traînée d'onde du profil.

On a cherché par conséquent des méthodes permettant d'obtenir immédiatement ces quantités intéressantes sans passer par un calcul détaillé et souvent ennuyeux. C'est K. POHLHAUSEN qui, dans cette intention, a proposé le premier de satisfaire les équations de la couche-limite *en moyenne*, c'est-à-dire en les intégrant terme à terme, avant de connaître leur solution, à travers la couche limite et en cherchant à résoudre simplement l'équation intégrale obtenue.

Pour obtenir ce résultat, POHLHAUSEN utilise la condition intégrale de Th. von KARMAN sur l'impulsion : l'intégration de l'équation du mouvement, l'introduction de l'équation de

continuité sous la forme également intégrée $v = - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy$, et la substitution de la tension tangentielle à la paroi, τ_p , à la place de $\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_p$ donnent en effet, après une intégration par parties, l'équation :

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} [u(u_e - u)] dy + \frac{du_e}{dx} \int_0^\infty (u_e - u) dy = \frac{\tau_p}{\rho}.$$

Cette condition de KARMAN peut être mise, d'après GRUSCHWITZ, sous une forme plus maniable par l'introduction de l'épaisseur de déplacement δ_d qui en incompressible à la forme

$$\delta_d = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy$$

et de l'épaisseur d'impulsion δ_2 donnée par

$$\delta_2 = \int_0^{\infty} \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy.$$

On obtient alors :

$$\frac{\tau_p}{\rho} = \frac{d}{dx} (u_e^2 \delta_2) + \delta_2 u_e \frac{du_e}{dx}.$$

D'une façon analogue, on peut obtenir également une condition intégrale sur l'énergie,

$$D = \frac{1}{2} \frac{\delta_2}{\nu u_e^2} \frac{d}{dx} (u_e^3 \delta_E)$$

dans laquelle δ_E est, d'une manière analogue à δ_2 , "l'épaisseur de perte d'énergie"

$$\delta_E = \int_0^{\infty} \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u^2}{u_e^2}\right) dy$$

et D une grandeur sans dimension qui mesure la dissipation de l'énergie,

$$D = \int_0^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial (y/\delta_2)} \left(\frac{u}{u_e} \right) \right]^2 d\left(\frac{y}{\delta_2}\right).$$

Cette condition sur l'énergie, établie par K. WIEGHARDT, a été utilisée par WALZ pour mettre au point une méthode globale dont l'adaptation au régime compressible n'a pas encore été faite. C'est pourquoi nous nous bornons ici à la reproduction du procédé de POHLHAUSEN adapté par E. GRUSCHWITZ et l'auteur au régime compressible, bien qu'il paraisse résulter des expériences qu'au moins en incompressible la méthode de WALZ utilisant le bilan d'énergie dans la couche-limite conduit à des résultats pour le frottement et le point de décollement plus exacts que celle de POHLHAUSEN que nous présentons ici sous la forme, devenue classique, qui lui a été donnée par HOLSTEN & BOHLEN.

2. Nous partons, d'après l'idée fondamentale de POHLHAUSEN, d'une représentation de la vitesse à l'intérieur de la couche-limite par un polynôme du 4^{ème} degré de l'ordonnée adimensionnelle $\eta = y/\delta$. δ est, comme au chapitre I, paragraphe 2, l'épaisseur de la couche-limite, épaisseur pour l'instant encore inconnue.

Puisque la condition d'adhérence à la paroi doit être nécessairement satisfaite, ce polynôme peut s'écrire immédiatement sous la forme

$$\frac{u}{u_e} = f(\eta) = a\eta + b\eta^2 + c\eta^3 + d\eta^4$$

dans laquelle les coefficients a, b, c, d peuvent naturellement dépendre de x , étant donné que dans le cas général le principe d'affinité ne saurait être valable.

Les conditions aux limites, nécessaires pour la détermination de a, b, c, d sont les suivantes :

$$\eta = 0; \quad \frac{u}{u_e} = 0; \quad \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -u_e \frac{du_e}{dx}$$

(la deuxième condition découle de l'équation du mouvement pour $y = 0$; elle est générale et d'un intérêt qui dépasse l'application qu'on fait ici)

$$\eta = 1; \quad \frac{u}{u_e} = 1; \quad \frac{\partial \left(\frac{u}{u_e} \right)}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \left(\frac{u}{u_e} \right)}{\partial \eta^2} = 0.$$

L'introduction du paramètre $\Lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{du_e}{dx}$ sans dimension conduit aux valeurs suivantes des coefficients

$$a = 2 + \frac{\Lambda}{6}, \quad b = -\frac{\Lambda}{2}, \quad c = -2 + \frac{\Lambda}{2}, \quad d = 1 - \frac{\Lambda}{6}$$

de façon que

$$\frac{u}{u_e} = F(\eta) + \Lambda \cdot G(\eta).$$

Les profils des vitesses forment donc une famille à un paramètre, Λ , qui représente physiquement le rapport entre les forces de pression et les forces de frottement :

$$\Lambda = \frac{\delta^2 du_e}{\nu dx} = - \frac{dp}{dx} \frac{\delta}{\mu \frac{u_e}{\delta}}$$

$\Lambda = 0$ signifie $dp/dx = 0$, donc le minimum de pression,

$\Lambda = -12$ signifie $a = 0$, donc le point de décollement,

$\Lambda = +12$ signifie existence de valeurs $\eta < 1$ avec $u/u_e > 1$ comme on le déduit facilement de la forme de $F(\eta)$ et $G(\eta)$:

$$F(\eta) = 1 - (1 - \eta)^3(1 + \eta), \quad G(\eta) = \frac{\eta}{6}(1 - \eta)^3.$$

On a donc $-12 \leq \Lambda \leq +12$ comme domaine de variation du paramètre de forme.

Les définitions de δ_d , δ_2 et τ_p donnent :

$$\begin{aligned} \frac{\delta_d}{\delta} &= \int_0^1 [1 - F(\eta) - \Lambda G(\eta)] d\eta = \frac{3}{10} - \frac{\Lambda}{120} \\ \frac{\delta_2}{\delta} &= \int_0^1 [F(\eta) + \Lambda G(\eta)] [1 - F(\eta) - \Lambda G(\eta)] d\eta = \frac{37}{315} - \frac{\Lambda}{945} - \frac{\Lambda^2}{9072} \\ \frac{\tau_p \delta}{\mu u_e} &= 2 + \frac{\Lambda}{6}. \end{aligned}$$

Pour la détermination du paramètre Λ , encore inconnue, nous calculons δ à l'aide de l'équation de KARMAN sous la forme qui lui a été donnée par GRUSCHWITZ :

$$\frac{\tau_p}{\rho} = u_e^2 \frac{d\delta_2}{dx} + (2\delta_2 + \delta_d) u_e \frac{du_e}{dx}$$

ou bien, rendue sans dimension par la multiplication par $\frac{\delta_2}{\nu u_e}$:

$$\frac{\tau_p \delta_2}{\mu u_e} = \frac{u_e \delta_2}{\nu} \frac{d\delta_2}{dx} + \left(2 + \frac{\delta_d}{\delta_2}\right) \frac{u_e \delta_2^2}{\nu}.$$

Puisque cette dernière équation ne contient plus explicitement δ , HOLSTEIN et BOHLEN ont eu l'idée de déterminer d'abord δ_2 à l'aide de l'équation ci-dessus et de passer ensuite à δ . Ils introduisent un nouveau paramètre de forme, formé à l'aide de δ_2 de façon analogue à Λ :

$$\kappa = \frac{\delta_2^2 du_e}{\nu dx} = Z \frac{du_e}{dx} \quad \text{avec} \quad Z = \frac{\delta_2^2}{\nu}.$$

On trouve facilement

$$\kappa = \left(\frac{37}{315} - \frac{\Lambda}{945} - \frac{\Lambda^2}{9072} \right)^2 \cdot \Lambda$$

Ceci permet d'exprimer $\frac{\delta_d}{\delta_2} = \frac{\delta_d}{\delta} \cdot \frac{\delta_2}{\delta}$ et $\frac{\tau_p \delta_2}{\mu u_e} = \frac{\tau_p \delta}{\mu u_e} \cdot \frac{\delta_2}{\delta}$

en fonction de κ , en passant par leur représentation en Λ .

En posant, pour abrégé,

$$\frac{\delta_d}{\delta_2} = f_1(\kappa), \quad \frac{\tau_p \delta_2}{\mu u_e} = f_2(\kappa)$$

et

$$F(\kappa) = 2 f_2(\kappa) - 4 \kappa - 2 \kappa f_1(\kappa),$$

on donne à l'équation de KARMAN-GRUSCHWITZ la forme

$$f_2(\kappa) = \frac{1}{2} u_e \frac{dZ}{dx} + (2 + f_1(\kappa)) \kappa$$

ou bien

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{F(\kappa)}{u_e}, \quad \kappa = Z \frac{du_e}{dx}$$

Ce système, qui conduit à une équation non linéaire du premier ordre en $Z = \delta_2^2/\nu$, ne dépend plus de la forme de l'obstacle. Sa résolution est facile quand on connaît $F(\kappa)$. On a en effet établi des tableaux qui donnent, en fonction de Λ :

$$\kappa = \left(\frac{37}{315} - \frac{\Lambda}{945} - \frac{\Lambda^2}{9072} \right)^2 \cdot \Lambda$$

$$f_1(\kappa) = \frac{\frac{3}{10} - \frac{\Lambda}{120}}{\frac{37}{315} - \frac{\Lambda}{945} - \frac{\Lambda^2}{9072}}$$

$$f_2(\kappa) = \left(2 + \frac{\Lambda}{6} \right) \left(\frac{37}{315} - \frac{\Lambda}{945} - \frac{\Lambda^2}{9072} \right)$$

$$F(\kappa) = 2 f_2(\kappa) - 4 \kappa - 2 \kappa f_1(\kappa)$$

et qui permettent en même temps de lire les valeurs de $F(\kappa)$ en fonction de κ .

Le calcul effectif est alors facile quand on a encore vaincu une petite difficulté au démarrage :

On commence le calcul au bord d'attaque. Ici peuvent se présenter deux cas différents : écoulement sans point d'arrêt (comme dans le cas de la plaque plane, $u_e \equiv U$) ou avec point d'arrêt.

Dans le premier cas, on a $u_e = U$ et $\delta_2 = 0$. De $\kappa = Z \frac{du_e}{dx}$ on tire alors $\kappa = 0$ et $\frac{dZ}{dx} = \frac{F(0)}{U}$. La suite est immédiate.

Dans le deuxième cas, on a $u_e(0) = 0$, $u_e'(0) = \frac{du_e}{dx}(0) \neq 0$. On obtiendrait alors $\frac{dZ}{dx}(0) = \infty$, sauf quand $F(\kappa) = 0$, condition qui conduit à $\kappa = 0,0770$ et $\Lambda = 7,052$, valeurs des paramètres qui caractérisent par conséquent le point d'arrêt.

On trouve alors :

$$Z(0) = \frac{0,0770}{u_e'(0)}$$

et par un passage à la limite dans la forme encore indéterminée pour $Z'(0) = \frac{dZ}{dx}(0)$:

$$Z'(0) = -0,0652 \frac{u_e''(0)}{u_e'(0)}$$

La suite ne présente plus de difficultés.

On obtient ainsi, dans l'un comme dans l'autre des deux cas, par intégration numérique les fonctions $Z(x)$, $\kappa(x)$ et $\Lambda(x)$, d'où l'on tire immédiatement les fonctions cherchées $\delta_2(x)$, $\delta_a(x)$, $\tau_p(x)$ et enfin $\delta(x)$.

3. MÉTHODES D'INTÉGRATION PAS A PAS.

1. Les méthodes globales, soit celle de POHLHAUSEN généralement utilisée, soit celle de WALZ plus récente, ont comme avantage indéniable de conduire rapidement à une solution des équations de la couche-limite qui fournit les valeurs auxquelles on s'intéresse, surtout dans les problèmes pratiques.

Cependant, l'exactitude de ces méthodes est souvent insuffisante. Ceci est vrai, surtout pour la détermination du point de décollement.

Pour une analyse plus poussée, les méthodes globales sont donc peu indiquées.

D'autre part, les méthodes que nous avons exposées dans le premier paragraphe de ce chapitre ne sont dans la plupart des cas valables que dans le voisinage immédiat du bord d'attaque.

On se trouve donc obligé de rechercher une méthode de résolution numérique qui —partant de la couche-limite connue dans une petite région autour du bord d'attaque— permet le calcul complet et, si possible, aussi exact que l'on désire des profils des vitesses dans toute la couche-limite laminaire.

Or, dans le cas général, une simplification ultérieure des équations de la couche-limite n'est plus possible. D'autre part, une résolution analytique du système dépasse les moyens mathématiques que l'on a actuellement à sa disposition.

Il ne reste par conséquent qu'une méthode de résolution numérique, donc une des méthodes d'intégration pas à pas, parmi lesquelles une des plus puissantes et modernes est celle des différences finies.

A notre connaissance, c'est GÖRTLER qui l'a appliquée pour la première fois à la résolution des équations de la couche-limite laminaire en régime incompressible.

La méthode qui fait l'objet d'une analyse très approfondie, publiée par LEVY, COURANT & FRIEDRICHS en 1928 [4], consiste essentiellement dans le remplacement des quotients diffé-

rentiels par des expressions algébriques, dans le cas le plus simple de $\frac{\partial u}{\partial x}$ par $\frac{u(x+k) - u(x-k)}{2k}$ et de $\frac{\partial u}{\partial y}$ par $\frac{u(y+h) - u(y-h)}{2h}$ pour k et h plus petits, mais fixes. De façon analogue, on a :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(x+k) + u(x-k) - 2u(x)}{k^2} \quad \text{etc...}$$

Une équation différentielle devient ainsi une équation algébrique qui permet souvent une solution plus facile.

2. GÖRTLER part, dans le cas incompressible, de l'équation du mouvement qui, par l'introduction de l'intégrale de l'équation de continuité, devient :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy = u_e \frac{du_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

ce qui, si on introduit au lieu des quotients différentiels les quotients aux différences finies, donne, après application de la formule du trapèze à l'intégrale :

$$u_{mn} \frac{u_{m+1n} - u_{mn}}{k} - \frac{u_{mn+1} - u_{mn-1}}{2h} \left[\sum_{i=1}^n \frac{u_{m+1i} - u_{mi}}{k} h \right] = u_e \frac{du_e}{dx} + \nu \frac{u_{mn+1} + u_{mn-1} - 2u_m}{h^2}$$

formule dans laquelle u_{mn} signifie $u(mk, nh)$.

Si l'on considère connues les valeurs dont le premier indice est m , cette formule permet le calcul algébrique successif de u_{m+11} , u_{m+12} , u_{m+13} , etc....

La formule pour $\eta = 1$, donc pour le calcul de u_{m+11} , est :

$$\frac{u_{m1} - \frac{u_{m2}}{2}}{h} \cdot u_{m+11} = \frac{u_{m1} - \frac{u_{m2}}{2}}{h} u_{m1} + u_e \frac{du_e}{dx} + \nu \frac{u_{m2} - 2u_{m1}}{h^2}$$

(compte tenu de ce que $u_{m0} = 0$), ce qui donne après division par le facteur de u_{m+11} l'équation

$$u_{m+11} = u_{m1} + \frac{k}{h^2} \frac{h^2 u_e u_e' + \nu (u_{m2} - 2u_{m1})}{u_{m1} - \frac{u_{m2}}{2}}.$$

Or, la différence entre u_{m1} et $u_{m2}/2$ est d'autant plus petite que h est choisi plus petit. Le terme qu'il faut ajouter à u_{m1} pour obtenir u_{m+11} ,

$$\frac{k}{h^2} \frac{h^2 u_e u_e' + \nu (u_{m2} - 2u_{m1})}{u_{m1} - \frac{u_{m2}}{2}} = \frac{k u_e u_e'}{u_{m1} - \frac{u_{m2}}{2}} - 2\nu$$

est donc un terme comportant un quotient de deux grandeurs très petites et dont au moins le dénominateur n'est qu'une approximation. On risque donc une erreur assez considérable dans la détermination des valeurs près de la paroi, ce qui a un mauvais effet sur l'exactitude de $\partial u / \partial y$, donc d'un des termes les plus intéressants.

C'est pourquoi GÖRTLER a remplacé sa méthode, dans les parties de la couche-limite près de la paroi, par l'introduction d'une expression polynomiale pour u , tout en conservant le calcul aux différences finies pour le reste de la couche-limite. Il obtient ainsi, cf. la dissertation de WITTING [5], une plus grande précision sans augmenter sensiblement le travail.

Une adaptation de cette méthode au régime compressible n'a pas encore été publiée; d'après un renseignement de la part de MM. GÖRTLER et WITTING, elle fait l'objet d'une thèse en cours de préparation.

3. Un autre procédé pour tourner cette difficulté a été — également en régime incompressible — conçu par K. SCHRÖDER [6].

Il soumet l'équation adoptée par GÖRTLER à une double transformation. On peut en effet lui donner, sans beaucoup de calcul, la forme suivante

$$u_e \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{du_e}{dx} \right) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (u_e - u) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

A cette équation qui, par l'introduction de $u^* = u - u_e$, s'écrit

$$u_e \frac{\partial u^*}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} = -u^* \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

on applique la transformation $\xi = \int_{x_0}^x \frac{dx}{u_e(x)}, \quad \eta = y$

et l'on obtient, en divisant encore par $u_e(x)$,

$$\frac{\partial u^*}{\partial \xi} - \nu \frac{\partial^2 u^*}{\partial \eta^2} = -\frac{u^*}{u_e} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{u_e} \frac{\partial u}{\partial \eta} \int_0^\eta \frac{\partial u}{\partial \xi} d\eta.$$

Dans cette équation, le deuxième membre est faible surtout à proximité de la paroi. On peut alors le remplacer, sans grand mal, par une approximation $f(\xi, \eta)$ qu'on obtient en employant pour $\partial u / \partial \xi$ la valeur déjà connue pour $\xi - k$, en calculant à l'aide de cette fonction approchée u^* et en améliorant — au moyen d'une itération assez simple — le résultat obtenu.

Cette méthode a pu être adaptée par l'auteur et Mme FLÜGGE-LOTZ au régime compressible. L'auteur a pu montrer la convergence du procédé et calculer, dans un exemple typique, les profils des vitesses et des températures dans la couche-limite.

Puisque la méthode sera exposée, dans le paragraphe 2 du chapitre suivant in extenso et discutée en détail, nous nous bornons ici à la signaler et à remarquer que M. WITTING a pu démontrer dans sa thèse que les méthodes de GÖRTLER et celle de K. SCHRÖDER sont équivalentes en régime incompressible.

Si nous avons choisi plutôt la deuxième que la première pour l'adaptation aux écoulements compressibles, la raison en est la plus grande facilité du calcul à proximité de la paroi, comme nous l'avons déjà signalé.

Les valeurs de u^* diminuant lorsqu'on approche de l'écoulement extérieur, SCHRÖDER a simplifié le calcul en utilisant un développement sous forme de polynôme pour $y \sim \delta$. Nous conserverons cependant le procédé non modifié qui nous permettra, cf. chapitre III, paragraphe 2, de déterminer en même temps la valeur de δ .

4. TRANSFORMATIONS HODOGRAPHIQUES DE LA COUCHE-LIMITE.

1. Une méthode pour traiter la couche-limite par réduction de ses équations à un type connu et mathématiquement facilement accessible a été développée en 1927 par R. von MISES.

Par l'introduction de la fonction du courant ψ comme variable indépendante, d'une pression totale $g(x, y)$ comme inconnue, il prépare les transformations hodographiques qui ont permis, en régime compressible, de simplifier sensiblement le problème mathématique.

La difficulté de la méthode de von MISES que nous allons exposer est celle de toutes les méthodes hodographiques : le retour aux coordonnées physiques qui se heurte généralement à des singularités assez pénibles à la paroi. Nous rencontrerons la même difficulté dans les méthodes compressibles conçues par CROCCO, HANTZSCHE & WENDT et l'auteur.

Cependant, les avantages mathématiques de l'équation transformée même sont tels qu'ils justifient largement l'étude de ces transformations; en effet, on parvient en régime compressible à traiter le cas le plus général par la résolution locale de deux équations ordinaires de type connu, et sans recours à des conditions initiales toujours mal définies.

Le mécanisme de ces transformations et également la difficulté du retour au plan physique ressortent d'une façon particulièrement claire dans la méthode incompressible de von MISES.

2. Nous introduisons dans

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

équations qui intègrent l'équation de continuité, à la place de x et y les nouvelles coordonnées $\xi = x$, $\eta = \psi$, d'où

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - v \frac{\partial u}{\partial \psi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = u \frac{\partial u}{\partial \psi}$$

d'où comme nouvelle forme de l'équation du mouvement

$$u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\xi} = \nu u \frac{\partial}{\partial \psi} \left(u \frac{\partial u}{\partial \psi} \right)$$

Nous posons de plus

$$g(\xi, \psi) = p(\xi) + \frac{\rho}{2} u^2 + \frac{\rho}{2} v^2 \approx p(\xi) + \frac{\rho}{2} u^2$$

("pression totale") et nous trouvons alors

$$\frac{\partial g}{\partial \xi} = \mu u \frac{\partial^2 g}{\partial \psi^2}$$

étant donné que $\frac{\partial p}{\partial \psi} = 0$. Enfin on a encore $u = \sqrt{\frac{2}{\rho} [g - p(\xi)]}$ et par conséquent :

$$\frac{\partial g}{\partial \xi} = \mu \sqrt{\frac{2}{\rho} (g - p)} \frac{\partial^2 g}{\partial \psi^2}$$

comme équation pour $g(\xi, \psi)$ avec $p(\xi)$ connu et avec les conditions aux limites suivantes :

$$\psi = 0 \rightarrow g = p(\xi), \quad \psi = \infty \rightarrow g = \frac{\rho}{2} u_e^2.$$

Cette équation est du type de l'équation de propagation de la chaleur et très simple dans sa forme.

Elle présente cependant deux inconvénients :

A la paroi on a, au moins dans le cas général où la pression est variable, $\frac{\partial g}{\partial \xi} \neq 0$, $g - p = 0$ et par conséquent $\frac{\partial^2 g}{\partial \psi^2} = \infty$, ce qui gêne le calcul numérique.

Puisqu'à l'écoulement extérieur correspond $\psi = \infty$, on n'a pas la possibilité de commencer le calcul de l'extérieur, solution qu'on a adoptée dans les autres méthodes hodographiques de conception plus moderne, où l'on a introduit $\eta = u/u_e$ comme variable indépendante : la frontière de la couche-limite se trouve alors à $\eta = 1$ et permet de commencer le calcul d'un profil au choix, soit à $\eta = 1$, soit à $\eta = 0$.

Nous n'insistons pas ici sur cette forme améliorée qui sera décrite en détail dans le chapitre suivant, pour les écoulements compressibles.

On passe de ψ à η à l'aide de l'équation :

$$\eta = \int_{\psi=0}^{\psi} \frac{d\psi}{u} = \sqrt{\frac{\rho}{2}} \int_{\psi=0}^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{g - p(\xi)}}.$$

On voit immédiatement la difficulté de l'intégration proposée : à la valeur de $\psi = 0$ correspond $u=0$ et par conséquent un démarrage difficile pour l'intégration, difficulté qui influence l'exactitude de la détermination de η et, par suite, de la connaissance de la configuration de l'écoulement dans la couche-limite.

Cette difficulté subsiste aussi plus ou moins dans les méthodes modernes malgré les différentes tentatives faites pour la tourner. C'est pourquoi les méthodes hodographiques se placent entre les méthodes globales et celles du calcul pas à pas. Elles sont plus rapides que les méthodes pas à pas qui sont, cependant, plus exactes. Elles sont à leur tour plus exactes que les méthodes globales du type POHLHAUSEN ou WIEGHARDT, mais légèrement moins rapides.

III - MÉTHODES DE SOLUTION EN RÉGIME COMPRESSIBLE.

1. SOLUTION GLOBALE DU TYPE POHLHAUSEN.

1. L'avantage de la décomposition du système des équations de la couche-limite en un système pour le calcul des vitesses et pressions avec ρ et μ constantes, suivi d'une équation (algébrique) pour la détermination de i - auquel conduit l'hypothèse de l'incompressibilité du du fluide - ne peut être conservé dans le cas général d'un fluide compressible (ρ et μ variables) que pour le nombre de PRANDTL $\mathfrak{P} = 1$. Nous y reviendrons dans le paragraphe 2.

Dans les premiers travaux, par exemple celui de A. BUSEMANN [7], on a presque toujours fait cette hypothèse simplificatrice. Malheureusement, pour l'air le nombre de PRANDTL est déjà sensiblement différent de 1; en effet, on sait que $\mathfrak{P} = 0,725$ environ, dans ce cas le plus important pour l'aérodynamique.

Aucune décomposition n'étant alors possible, on est obligé de partir du système complet tel qu'il a été indiqué page 12 :

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= - \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} &= 0 \\ \rho \left(u \frac{\partial \left(i + \frac{u^2}{2} \right)}{\partial x} + v \frac{\partial \left(i + \frac{u^2}{2} \right)}{\partial y} \right) &= \frac{1}{\mathfrak{P}} \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial}{\partial y} \left(i + \mathfrak{P} \frac{u^2}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

Ce système étant assez difficile à traiter, on peut se demander s'il n'existe pas un moyen d'intégrer ces équations à la manière de POHLHAUSEN comme en incompressible, c'est-à-dire en les satisfaisant de façon globale, après intégration à travers la couche-limite.

Le problème a été résolu en 1950 dans le cas d'une paroi non conductrice de la chaleur par GRUSCHWITZ [8], dont nous retraçons ici le raisonnement.

2. En utilisant les épaisseurs de la couche-limite que nous avons introduites chapitre I, paragraphe 2,

épaisseur de déplacement δ_d

épaisseur de quantité du mouvement δ_2

épaisseur d'enthalpie δ_i

auxquelles s'ajoute encore l'épaisseur d'énergie cinétique

$$\delta_E = \int_0^{\infty} \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u^2}{u_e^2} \right) dy$$

(reliée, dans le cas de la paroi isolante, à δ_i par la formule $\delta_E = \frac{2 i_e}{u_e^2} \delta_i$),

et en intégrant les équations du mouvement et de l'énergie, compte tenu de celle de continuité,

à travers la couche-limite, on obtient deux conditions intégrales

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{\delta_2}{u_e} \frac{du_e}{dx} \left(2 + \frac{\delta_d}{\delta_2} - M_e^2 \right) = - \frac{\mu_p}{\rho_e u_e^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_p$$

$$\frac{d\delta_E}{dx} + \frac{\delta_E}{u_e} \frac{du_e}{dx} \left(3 - (2 - \gamma) M_e^2 \right) = - \frac{2}{\rho_e u_e^3} \int_0^\infty \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy$$

$M_e = \frac{u_e}{a_e}$ étant le nombre de Mach local.

Supposons alors que la vitesse u dans la couche-limite, pour chaque valeur x de l'abscisse, est donnée par une fonction de y qui atteint à une distance finie δ (« épaisseur de la couche-limite »), et non seulement à l'infini, la valeur $u_e(x)$ de l'écoulement potentiel extérieur.

Passant encore à des grandeurs sans dimension, $\frac{u}{u_e}$ pour les vitesses et $\eta = \frac{1}{\delta_1} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_e} dy$ avec $\delta_1 = \int_0^{\delta} \frac{\rho}{\rho_e} dy$ pour les distances de la paroi, nous pouvons représenter, comme l'a déjà fait POHL-HAUSEN en incompressible, le profil de vitesses par un polynôme du 4^e degré

$$\frac{u}{u_e} = c_1 \eta + c_2 \eta^2 + c_3 \eta^3 + c_4 \eta^4$$

qui tient déjà compte de la condition $u_p = 0$.

Une deuxième condition à la paroi découle, comme en incompressible, de l'équation du mouvement pour $y = 0$; elle donne :

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]_p = - \rho_e u_e \frac{du_e}{dx}$$

ou, en tenant compte de ce que la paroi est isolante - condition exprimée par

sur les nouvelles coordonnées η et $\frac{u}{u_e}$:

$$\left(\frac{\partial i}{\partial y} \right)_p = \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_p = \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} \right)_p = 0 \quad \text{et après transformation}$$

$$\frac{\mu_p \rho_p^2}{\delta_1^2 \rho_e^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{u}{u_e} \right) \right]_p = - \rho_e \frac{du_e}{dx}$$

Pour $\eta = 1$, on a (à la frontière de la couche-limite !)

$$\frac{u}{u_e} = 1 \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u}{u_e} \right) = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{u}{u_e} \right) = 0.$$

Ces conditions permettent de déterminer les coefficients c_i .

On trouve :

$$c_1 = 2 + \frac{\Lambda_p}{6}; \quad c_2 = -\frac{\Lambda_p}{2}; \quad c_3 = \frac{\Lambda_p}{2} - 2; \quad c_4 = 1 - \frac{\Lambda_p}{6}$$

où Λ_p est un paramètre de forme sans dimension, défini par

$$\Lambda_p = \frac{\rho_e^2 \mu_e}{\rho_p^2 \mu_p} \cdot \frac{\delta_1^2}{\nu_e} \frac{du_e}{dx}$$

3. Nous pourrions également représenter le profil de l'enthalpie par un polynôme en η . Mais l'allure du profil des températures étant différente de celle des vitesses, on serait alors obligé d'introduire une deuxième épaisseur (thermique) de la couche-limite, plus grande que celle de la vitesse.

GRUSCHWITZ tourne cette difficulté en représentant, au lieu de l'enthalpie i même, l'expression $\left(1 - \frac{u}{u_e} \right) \frac{\rho_e}{\rho}$ (qui s'annule pour $y \geq \delta$) par un polynôme :

$$\left(1 - \frac{u}{u_e} \right) \frac{\rho_e}{\rho} = b_0 + b_1 \eta + b_2 \eta^2 + b_3 \eta^3 + b_4 \eta^4 + b_5 \eta^5$$

Comme de celle du mouvement, on peut tirer de l'équation de l'énergie une condition pour $\eta = 0$ qui s'écrit, compte tenu de la condition de non-conductibilité de la paroi,

$$\left(\frac{\partial^2 i}{\partial y^2} \right)_p = - \frac{\rho_e}{\rho_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_p^2$$

Il s'ajoute la condition de non-conductibilité elle-même, $\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\rho_e}{\rho}\right)\right)_p = 0$.

Pour $\eta = 1$, on a

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{u}{u_e}\right)\frac{\rho_e}{\rho} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\left(1 - \frac{u}{u_e}\right)\frac{\rho_e}{\rho}\right] &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\left[\left(1 - \frac{u}{u_e}\right)\frac{\rho_e}{\rho}\right] &= 0\end{aligned}$$

On a ainsi cinq conditions qui permettent d'exprimer les coefficients b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 en fonction de b_0 . Les profils des vitesses sont donnés en fonction de Λ_p .

Or, ce paramètre Λ_p peut être lié à b_0 à l'aide d'une relation souvent employée dans la dynamique des gaz et dont on reparlera au paragraphe 3 de ce chapitre. Cette relation, dont la validité approximative est confirmée par l'expérience, considère la viscosité comme proportionnelle à la température et donne :

$$\mu p = C^{\text{te}}.$$

De plus, on tire de $\frac{u_p}{u_e} = 0$ pour $\eta = 0$ que $b_0 = \frac{\rho_e}{\rho_p}$.

On a alors par suite :

$$\Lambda_p = \frac{\rho_e^2 \mu_e}{\rho_p^2 \mu_p} \cdot \frac{\delta_1^2 du_e}{\nu_e dx} = \frac{\rho_e}{\rho_p} \frac{\delta_1^2 du_e}{\nu_e dx} = b_0 \frac{\delta_1^2 du_e}{2 \nu_e dx}.$$

Cette relation sera ajoutée aux deux conditions intégrales de la page 34. D'après les définitions de $\delta_2, \delta_\varepsilon, \delta_d$ et δ_1 , on a :

$$\begin{aligned}\delta_2 &= \delta_1 \int_0^1 \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) d\eta = \delta_1 \cdot f_1(\Lambda_p) \\ \delta_\varepsilon &= \delta_1 \int_0^1 \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u^2}{u_e^2}\right) d\eta = \delta_1 \cdot f_2(\Lambda_p) \\ \delta_d &= \delta_1 \int_0^1 \frac{\rho_e}{\rho} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) d\eta + \frac{u_e^2}{2 i_e} \delta_\varepsilon = \delta_1 \left[f_3(b_0) + \frac{u_e^2}{2 i_e} f_2(\Lambda_p) \right]\end{aligned}$$

où les f_1, f_2, f_3 sont des fonctions connues de leurs arguments.

Leur introduction dans les deux conditions intégrales fait de celles-ci des relations entre δ_1, Λ_p et b_0 . On a donc trois équations entre trois inconnues qui permettent leur calcul. Or, comme en incompressible, on donne aux relations une forme qui permet d'éviter l'épaisseur δ_1 , remplacée par l'épaisseur de quantité de mouvement. On introduit à cette intention un nouveau paramètre de forme défini, par analogie avec le cas incompressible, par :

$$\kappa_p = \frac{\delta_2^2 b_0}{\nu_e} \frac{du_e}{dx} = \Lambda_p \frac{\delta_2^2}{\delta_1^2}.$$

Le fait que nous ayons exprimé δ_2/δ_1 à l'aide de Λ_p par

$$f_1(\Lambda_p) = \frac{5328 - 48 \Lambda_p - 5 \Lambda_p^2}{45360}$$

établit une relation entre κ_p et Λ_p qui nous permet de considérer toute fonction de Λ_p comme fonction de κ_p et vice versa.

En transformant ainsi les trois équations pour δ_1, Λ_p, b_0 en trois équations pour δ_2, κ_p, b_0 GRUSCHWITZ obtient enfin le système

$$\begin{aligned}\frac{\delta_2 u_e}{\nu_e} \frac{d\delta_2}{dx} &= F_1(\kappa_p) - \frac{\kappa_p}{b_0} \cdot [2 - M_e^2 F_2(\kappa_p)] \\ b_0 &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2\right) \frac{1 + M_e^2 F_3(\kappa_p)}{1 + M_e^2 F_4(\kappa_p)} \\ \kappa_p &= \frac{\delta_2^2 b_0}{\nu_e} \frac{du_e}{dx}\end{aligned}$$

dans lequel $F_1(\kappa_p)$, $F_2(\kappa_p)$, $F_3(\kappa_p)$, $F_4(\kappa_p)$ sont quatre fonctions de κ_p (ou de Λ_p), définies par

$$\begin{aligned} F_1(\kappa_p) &= 2 \frac{\delta_2}{\delta_1} \left(1 - \frac{\Lambda_p}{15} + \frac{\Lambda_p^2}{240} \right) \\ F_2(\kappa_p) &= 1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{\delta_1}{\delta_2} \left(\frac{\delta_E}{\delta_1} - \frac{(12+\Lambda_p)^2}{2160} \right) \\ F_3(\kappa_p) &= \frac{\gamma-1}{2} \left[2 - \frac{\delta_1}{\delta_2} \left(\frac{\delta_E}{\delta_1} - \frac{(12+\Lambda_p)^2}{2160} \right) \right] \\ F_4(\kappa_p) &= \frac{\gamma-1}{2} \left[2 - \frac{\delta_1}{\delta_2} \left(\frac{\delta_E}{\delta_1} - \frac{(12+\Lambda_p)^2}{2160} \right) \right] \end{aligned}$$

Ces fonctions connues de Λ_p (en effet, $\frac{\delta_2}{\delta_1} = f_1(\Lambda_p)$, voir page 35, et

$$\frac{\delta_E}{\delta_1} = f_2(\Lambda_p) = \frac{798\,048 - 4\,656\,\Lambda_p - 758\,\Lambda_p^2 - 7\,\Lambda_p^3}{4\,324\,326}$$

ont été calculées par GRUSCHWITZ sous forme de tables en fonction de Λ_p aussi bien que de κ_p .

Le système de trois équations donné par GRUSCHWITZ permet, à l'aide de ces tables, le calcul de δ_2 , b_0 et κ_p , si l'on se fixe u_e , $(du_e)/(dx)$, M_e et v_e en fonction de x .

4. Le calcul pour $\mathcal{T} \neq 1$ peut être alors effectué de la manière suivante :

Les valeurs de δ_2 et κ_p étant données pour $x = x_0$, on tire b_0 de la deuxième équation. La première donne alors $(d\delta_2)/(dx)$. On a ensuite

$$\delta_2(x_0 + \Delta x) = \delta_2(x_0) + \left(\frac{d\delta_2}{dx} \right)_{x=x_0} \cdot \Delta x.$$

On utilise momentanément encore le b_0 qui correspond à x_0 pour déterminer à l'aide de la troisième équation une valeur de κ_p approchée pour $x_0 + \Delta x$. Cette valeur de κ_p sera portée dans la deuxième équation et fournit un b_0 corrigé qui, de nouveau introduit dans la troisième équation, permet la détermination d'un κ_p corrigé. Après quelques itérations (en général une seule itération est suffisante), les valeurs de b_0 et κ_p ne varient plus et permettent, portées dans la première équation, le calcul de $(d\delta_2)/(dx)$ pour $x_0 + \Delta x$. Ceci nous fournit

$$\delta_2(x_0 + 2\Delta x) = \delta_2(x_0 + \Delta x) + \left(\frac{d\delta_2}{dx} \right)_{x=x_0 + \Delta x} \cdot \Delta x,$$

et ainsi de suite.

Comme x_0 de départ, on choisira en général le point d'arrêt avec $u_e = M_e = 0$ et $b_0 = 1$. La deuxième des équations de GRUSCHWITZ, différenciée par rapport à x , donne, par suite de la condition $M_e(x_0) = 0$: $\left(\frac{db_0}{dx} \right)_{x=x_0} = 0$. De plus, on a $\frac{dv_e}{dx} = 0$. $\frac{d\delta_2}{dx}$ ne peut alors rester fini que si $F_1(\kappa_p) = 2\kappa_p$, d'où on tire

$$\kappa_p = (\kappa_p)_0 = 0,077\,036.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \lim_{\kappa_p \rightarrow (\kappa_p)_0} \frac{d\delta_2}{dx} &= \lim_{\kappa_p \rightarrow (\kappa_p)_0} \frac{(F_1 - 2\kappa_p)v_e}{\delta_2 u_e} = \lim_{\kappa_p \rightarrow (\kappa_p)_0} \frac{v_e}{\delta_2} \frac{\left(\frac{dF_1}{d\kappa_p} - 2 \right) \frac{d\kappa_p}{dx}}{\frac{du_e}{dx}} = -2,775 \lim_{\kappa_p \rightarrow (\kappa_p)_0} \frac{v_e}{\delta_2} \frac{\frac{d\kappa_p}{dx}}{\frac{du_e}{dx}} \\ &= -2,775 \lim_{\kappa_p \rightarrow (\kappa_p)_0} \left(2 \frac{d\delta_2}{dx} + \delta_2 \frac{\frac{d^2 u_e}{dx^2}}{\frac{du_e}{dx}} \right) \end{aligned}$$

et par conséquent :

$$\frac{d\delta_2}{dx} = -0,424 \delta_2 \frac{\frac{d^2 u_e}{dx^2}}{\frac{du_e}{dx}}$$

S'il n'y a pas de point d'arrêt (dièdre en supersonique), la couche-limite commence en $x_0 = 0$ avec l'épaisseur $\delta_2 = 0$, ce qui donne $\kappa_p = 0$ et permet, en conséquence, le démarrage immédiat du calcul.

Le décollement est déterminé, d'après notre discussion au chapitre I, paragraphe 3, par la condition

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_p = \left(\frac{\partial u_e}{\partial \eta}\right)_p \cdot u_e \cdot \frac{1}{\delta_1} \cdot \frac{\rho_p}{\rho_e} = 0$$

ce qui entraîne $\left(\frac{\partial u_e}{\partial \eta}\right)_p = 0 = c_1 = 2 + \frac{\Lambda_p}{6} = 0$.

Le point de décollement est donc caractérisé par $\Lambda_p = -12$ (ou bien $\kappa_p = -0,15673$).

5. La méthode a été appliquée par l'auteur à un exemple fictif, dont la distribution des vitesses extérieures en fonction de x est donnée par une fonction explicite, déterminée par GRUSCHWITZ, Mme FLÜGGE-LOTZ et l'auteur de façon à représenter convenablement l'allure d'un écoulement extérieur en partie supersonique, avec point d'arrêt, minimum de pression et décollement.

C'est cet écoulement, dont les vitesses sont représentées par la formule

$$\frac{u_e}{U} = \frac{\xi(\xi+5)}{(\xi+1)^2},$$

$\xi = (x/L)$, L étant une longueur de référence, U = vitesse à l'infini, qui servira pour l'application des méthodes de calcul de la couche-limite compressible que nous exposerons dans ce chapitre.

En choisissant encore $L = 1$ m, $U = 304$ m/s, $\nu_0 = 1,9425 \cdot 10^{-5}$ m²/s et $T_0 = 241,5^\circ$ K (où l'indice 0 caractérise l'état à l'infini), on a à sa disposition un exemple "étalon" qui permet de confronter les différentes méthodes discutées.

De plus, cet exemple permet d'évaluer l'influence du nombre de PRANDTL sur les grandeurs caractéristiques de la couche-limite compressible et d'apprécier l'erreur commise par les méthodes dans lesquelles on suppose $\mathfrak{P} = 1$.

En effet, le système de GRUSCHWITZ se simplifie considérablement pour $\mathfrak{P} = 1$: on voit immédiatement que $F_3(\kappa_p) = F_4(\kappa_p)$ et par conséquent :

$$b_0 = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2.$$

La valeur de b_0 s'obtient donc immédiatement à partir de la connaissance de M_e et ne nécessite aucune itération. κ_p de son côté peut alors être tiré de la troisième des équations avec le b_0 exact, correspondant au δ_2 obtenu à l'aide de la première des équations pour l'abscisse précédente.

Les résultats du calcul numérique, exécuté par l'auteur pour $\mathfrak{P} = 1$ et pour $\mathfrak{P} = 0,725$, sont représentés dans les figures 3 à 7, tandis que sur la planche 2 a été dessinée l'allure des courbes de u_e et de M_e correspondant à l'exemple étalon.

La méthode de GRUSCHWITZ a tendance à fournir pour l'épaisseur de quantité de mouvement (et par conséquent pour les épaisseurs de la couche-limite en général) des valeurs trop faibles. En effet, la couche-limite ayant tendance à s'élargir lorsque x croît, l'emploi du $(d\delta_2)/(dx)$ correspondant au début de l'intervalle risque de tenir les valeurs de δ_2 systématiquement au-dessous de leurs valeurs exactes.

On pourrait, dans une certaine mesure, remédier à cette erreur systématique par une itération qui - après le calcul ici exposé de $(d\delta_2)/(dx)$ aux abscisses x_0 et $x_0 + \Delta x$ - utilise leur moyenne pour recalculer $\left(\frac{d\delta_2}{dx}\right)_{x_0 + \Delta x}$ et ainsi de suite; mais une telle complication du calcul qui comporte déjà une itération portant sur b_0 alourdirait l'emploi de la méthode en lui faisant perdre un de ses plus grands avantages.

Les valeurs trop faibles, obtenues pour l'épaisseur de la couche-limite, entraînent une autre erreur :

De la discussion du paragraphe 3 du chapitre I résulte que la couche-limite a d'autant plus tendance à décoller que l'énergie cinétique, contenue dans une couche d'une épaisseur donnée près de la paroi, est plus faible, ce qui est d'autant plus le cas que la couche-limite est plus épaisse.

Si donc le calcul d'après GRUSCHWITZ a tendance à donner une épaisseur trop faible, le point de décollement obtenu par cette méthode sera en revanche trop loin.

Cependant, cet inconvénient ne paraît pas trop grave : on a vu au chapitre I, paragraphe 3, que de toute façon le point de décollement est mal déterminé, étant donné que les équations de la couche-limite même y cessent d'être valables. De plus, il est très probable que le décollement laminaire ne sera pas atteint, la couche-limite devenant turbulente beaucoup plus tôt.

La confrontation des valeurs de δ_2 , δ_E , δ_i et $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_p$ avec celles données par d'autres méthodes montre cependant que l'erreur commise sur ces quantités n'est pas très importante; elle est de l'ordre de 5-10% au maximum.

Il est intéressant de noter que l'écart entre les courbes obtenues pour $\mathcal{P} = 1$ et pour $\mathcal{P} = 0,725$ est très faible, sauf naturellement pour les valeurs de la température à la paroi où il peut atteindre 12%. Nous revenons sur cette question dans le paragraphe suivant. Pour δ_2 , δ_E et δ_i , l'écart est de 2% environ.

De plus, les épaisseurs obtenues pour $\mathcal{P} = 1$ sont légèrement plus grandes que celles correspondant à $\mathcal{P} = 0,725$ et tendent donc à corriger le défaut signalé de la méthode. Cette conclusion, confirmée d'ailleurs par la méthode du paragraphe suivant, permet de se limiter au calcul beaucoup plus simple de la couche-limite pour $\mathcal{P} = 1$ dans tous les cas où l'on ne s'intéresse pas particulièrement aux valeurs de la température à la paroi.

En résumé, la méthode de GRUSCHWITZ est rapide, simple et suffisamment exacte dans tous les cas où il s'agit de connaître le comportement de la couche-limite dans ses grands traits.

2. MÉTHODE D'INTÉGRATION PAS A PAS.

1. En principe, chaque méthode qui remplace l'intégrale, solution exacte d'une équation différentielle, par une somme finie formée à l'aide d'intervalles de longueur petite Δx , est une méthode d'intégration pas à pas.

La solution de la première équation de GRUSCHWITZ dans le paragraphe précédent serait, de ce point de vue, une méthode pas à pas aussi bien que celle de l'équation de BLASIUS.

Cependant, l'utilisation de cette méthode d'intégration a un caractère plutôt accidentel et pourrait être, au moins théoriquement et sans changer la méthode de résolution des équations de la couche-limite proprement dite, remplacée par n'importe quel autre moyen d'intégration (éventuellement) disponible.

Par "méthode d'intégration pas à pas", nous voulons désigner ici le remplacement systématique de toutes les différentiations indiquées dans le système d'équations à résoudre par des expressions finies, dans l'intention de ramener le système à des équations algébriques. Nous en avons déjà étudié deux exemples dans le chapitre II, paragraphe 3.

A notre connaissance, aucune adaptation d'une telle méthode au cas compressible n'a été encore publiée.

Cependant, l'auteur en collaboration avec Mme J. FLÜGGE-LOTZ a mené à terme les transformations et démonstrations mathématiques qui ont permis l'adaptation de la méthode de K. SCHRÖDER (voir chapitre II, paragraphe 3) au régime compressible.

Le travail a été consigné, avec les résultats des calculs effectués par l'auteur à l'Office National d'Etudes et de Recherches Aéronautiques, dans une note intérieure de l'O.N.E.R.A., mais en ne donnant aucun détail mathématique. Un extrait en a été donné comme annexe dans la publication de M. GRUSCHWITZ en 1950 [8].

L'auteur a le devoir agréable de gratitude et de reconnaissance de faire état ici de la contribution que Mme FLÜGGE-LOTZ avait apportée personnellement à cette recherche et, surtout de la permission qu'elle lui a donnée de publier ici les considérations physiques et de principe qui lui reviennent.

La méthode a ceci de particulier que le cas du problème du thermomètre, le plus simple et le seul traité, en général, est moins facile à résoudre par exemple que celui où la température à la paroi est imposée. C'est pourquoi les démonstrations ci-dessous sont principalement orientées vers une application au cas le plus difficile de la paroi isolante.

On signalera cependant en passant les changements nécessités par une autre condition thermique à la paroi. De plus, la résolution du problème du thermomètre permet le calcul de l'exemple étalon et sa confrontation avec les résultats des méthodes des paragraphes 1 et 3 de ce chapitre.

2. D'après l'idée de Mme FLÜGGE-LOTZ, nous considérons le système des équations de la couche-limite compressible,

$$\begin{aligned}\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right) &= -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} &= 0 \\ \rho\left(u\frac{\partial\left(i+\frac{u^2}{2}\right)}{\partial x}+v\frac{\partial\left(i+\frac{u^2}{2}\right)}{\partial y}\right) &= \frac{1}{\mathfrak{P}}\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\frac{\partial}{\partial y}\left(i+\mathfrak{P}\frac{u^2}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

d'abord pour $\mathfrak{P} = 1$.

Les deux premières équations ne sont pas affectées par cette hypothèse, cependant que la troisième prend la forme beaucoup plus simple

$$\rho\left(u\frac{\partial j}{\partial x}+v\frac{\partial j}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial j}{\partial y}\right)$$

avec $j = i + \frac{u^2}{2}$ (enthalpie totale spécifique du fluide).

Les conditions aux limites que l'on obtient pour cette équation sont, pour $\gamma = 0$:

$$\left(\frac{\partial j}{\partial y}\right)_p = \left(\frac{\partial i}{\partial y}\right)_p + u_p\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_p = \left(\frac{\partial i}{\partial y}\right)_p$$

dans le cas où le gradient de la température à la paroi est donné, et:

$$j_p = i_p$$

dans le cas où la température pariétale même est prescrite.

Nous discuterons ici les deux cas les plus intéressants, ou : paroi athermane :

$$\left(\frac{\partial j}{\partial y}\right)_p = \left(\frac{\partial i}{\partial y}\right)_p = 0$$

ou : paroi tenue à une température constante : $j_p = i_p = \text{constante}$, pour $\gamma = \delta$ (à la frontière extérieure de la couche-limite) :

$$\left(\frac{\partial i}{\partial y}\right)_e = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_e = 0 \quad \text{d'où l'on tire :}$$

$$\rho_e \left[u_e \left(\frac{\partial j}{\partial x}\right)_e + \underbrace{v_e \left(\frac{\partial i}{\partial y}\right)_e + v_e u_e \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_e}_{=0} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left(\underbrace{\mu \left(\frac{\partial i}{\partial y} + u \frac{\partial u}{\partial y}\right)_e}_{=0} \right)$$

c'est-à-dire $\left(\frac{\partial j}{\partial x}\right)_e = 0$, donc $j_e = C^{\text{te}}$.

Reste à déterminer l'état initial à $x = 0$:

Pour un écoulement sans point d'arrêt, l'épaisseur de la couche-limite est nulle. On a alors $j_e = j_p = j_0$ (valeur de l'enthalpie totale spécifique avant l'obstacle = valeur de l'enthalpie totale à l'infini).

Pour un écoulement avec point d'arrêt, on peut considérer l'écoulement dans le voisinage de ce point comme incompressible; il est alors possible, par analogie avec le procédé de POHLHAUSEN, de développer $j = j(x, y)$ suivant un polynôme en x et y , valable au moins au voisinage de $x = 0$,

$$j = j_0 + p_1(y)x + p_2(y)x^2 + \dots$$

d'où, pour $x = 0$, $j = j_e = j_0$.

L'équation de l'énergie

$$\rho \left(u \frac{\partial j}{\partial x} + v \frac{\partial j}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial j}{\partial y} \right)$$

peut alors être interprétée comme une équation de propagation de la chaleur, x jouant le rôle du temps, y celui de l'abscisse sur le conducteur et j celui de la température dont la distribution initiale est constante.

Le bout du conducteur ($y = 0$) est :

ou bien thermiquement isolé : $\left(\frac{\partial j}{\partial y}\right)_p = 0$,

ou bien tenu à une température constante j_p .

De l'autre côté, le conducteur est tenu, à la distance $\delta(x)$ du bout croissante avec le "temps" croissant, à une température constante pour tous les temps, $j_e = \text{constante}$.

Dans les deux cas, la solution est unique et bien connue : $j = j_0 = \text{constante}$. On a donc le résultat :

Pour $\mathcal{L} = 1$, les conditions $\left(\frac{\partial i}{\partial y}\right)_p = 0$ et $i_p = \text{constante}$ sont équivalentes et conduisent à la solution unique $j = j_0$.

En tenant compte de ce résultat, $i = j_0 - \frac{u^2}{2}$, et de la propriété de la couche-limite $p = p_e(x)$ démontrée chapitre I, paragraphe 1, on obtient par les équations de définition de la masse spécifique et de la viscosité :

$$\rho = \frac{c_p p}{r \cdot i} = \frac{c_p}{c_p - c_v} \frac{\rho_e}{j_r - \frac{u^2}{2}}$$

et

$$\mu = \mu_0 \frac{i_0 + c_p C}{i + c_p C} \cdot \left(\frac{i}{i_0}\right)^{3/2} = \mu_0 \frac{i_0 + c_p C}{j_0 + c_p C - \frac{u^2}{2}} \cdot \left(\frac{j_0 - \frac{u^2}{2}}{i_0}\right)^{3/2}$$

donc des valeurs qui dépendent uniquement de grandeurs connues et de l'inconnue u .

Les deux équations restantes, celle du mouvement et celle de continuité, deviennent, en vertu de ces valeurs de ρ et μ , deux équations aux deux inconnues u et v . On a donc le résultat important :

Pour $\mathfrak{P} = 1$ et $\left(\frac{\partial i}{\partial y}\right)_p = 0$ (ou bien, équivalente dans ce cas, $i_p = \text{constante}$), les équations du mouvement et celle de l'énergie deviennent indépendantes. La solution de celle de l'énergie est immédiate et réduit le système à deux équations en u et v . En remplaçant enfin ρv par $-\int_0^y \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dy$ (solution de l'équation de continuité), on a une seule équation (intégral-) différentielle pour u :

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dy = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{dp}{dx}$$

dont nous cherchons la solution u satisfaisant à $u_p \equiv 0$ et $u(\delta) = u_e(x)$.

3. Nous faisons momentanément l'hypothèse d'avoir déjà déterminé la solution $u(x, y)$ pour $\mathfrak{P} = 1$.

Pour un nombre de Prandtl pas trop différent de 1, comme c'est celui de l'air, $\mathfrak{P} = 0,725$, Mme FLÜGGE-LOTZ a proposé un développement des fonctions cherchées en séries de puissance de $1 - \mathfrak{P}$. On obtient alors des développements de la forme suivante :

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + u_1(1 - \mathfrak{P}) + u_2 \frac{(1 - \mathfrak{P})^2}{2!} + \dots \\ i &= \bar{i} + i_1(1 - \mathfrak{P}) + i_2 \frac{(1 - \mathfrak{P})^2}{2!} + \dots \\ \rho &= \bar{\rho} + \rho_1(1 - \mathfrak{P}) + \rho_2 \frac{(1 - \mathfrak{P})^2}{2!} + \dots \\ \mu &= \bar{\mu} + \mu_1(1 - \mathfrak{P}) + \mu_2 \frac{(1 - \mathfrak{P})^2}{2!} + \dots \end{aligned}$$

et d'autres analogues pour v , j , etc...

Dans ces développements, les valeurs correspondant à $\mathfrak{P} = 1$, $\bar{u}$, $\bar{i}$, $\bar{\rho}$, $\bar{\mu}$ etc, sont connues.

Nous introduisons alors les développements ci-dessus dans les équations de la couche-limite et nous ordonnons par rapport aux puissances de $1 - \mathfrak{P}$.

Pour effectuer plus facilement cet arrangement, nous écrivons l'équation de l'énergie sous la forme suivante, légèrement transformée :

$$\rho \left(u \frac{\partial j}{\partial x} + v \frac{\partial j}{\partial y} \right) = \frac{1}{\mathfrak{P}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial j}{\partial y} \right) - \frac{1 - \mathfrak{P}}{\mathfrak{P}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu u \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

L'identification des coefficients des puissances de $1 - \mathfrak{P}$ consécutives dans les équations de la couche-limite conduit alors à des systèmes pour

$$\begin{array}{ll} \bar{u}, \bar{v}, \bar{j} & (\text{puissances } (1 - \mathfrak{P})^0) \\ u_1, v_1, j_1 & (\text{puissances } (1 - \mathfrak{P})^1) \end{array}$$

etc...

Le premier système est celui déjà résolu pour $\mathfrak{P} = 1$.

Le deuxième, dont les coefficients contiennent $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{j}$, $\bar{\mu}$, fournit avec ses solutions u_1 , v_1 , j_1 des corrections permettant l'amélioration des solutions pour $\mathfrak{P} \neq 1$.

Cependant, dans les équations du mouvement et de la continuité pour u_1 et v_1 , figurent également les grandeurs ρ_1 et μ_1 qui dépendent de i_1 . Ces équations sont donc liées à la

troisième, celle de l'énergie qui, pour $(1 - \mathfrak{P})^1$, a la forme (compte tenu de $\frac{\partial \bar{j}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{j}}{\partial y} = 0$):

$$\bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial j_1}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial j_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\mu} \frac{\partial j_1}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\mu} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right).$$

Elle ne dépend donc pas des u_1 et v_1 et permet la résolution par rapport à j_1 . Après, il est loisible de calculer u_1 et v_1 à l'aide des équations de mouvement et de continuité, après avoir exprimé ρ_1 et μ_1 en fonction de $i_1 = j_1 - \bar{u} u_1$.

En continuant ainsi, on peut calculer successivement $j_1, u_1, v_1; j_2, u_2, v_2; \dots$ etc ...

4. En partant de cette conception, nous étudierons en détail les procédés numériques de résolution des équations ainsi découplées en commençant par considérer celle en u dans le cas de $\mathfrak{P} = 1$.

Sa résolution est — comme également dans le cas incompressible — délicate à cause du facteur ρu figurant dans le premier terme, facteur qui s'annule pour $y \rightarrow 0$.

Pour éviter cette difficulté, nous appliquons une transformation qui, dans le régime incompressible, a déjà facilité l'emploi des différences finies dans la méthode de K. SCHRÖDER [6], cf. chapitre II, paragraphe 3.

Nous posons $u^* = u - u_e$ et $(\rho u)^* = \rho u - \rho_e u_e$.

L'équation

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} dy = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{dp}{dx}$$

devient, après une petite transformation et compte tenu de la relation $\rho_e u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{dp}{dx} = 0$ (suite de cette équation même pour $y = \delta$, à cause de $\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_e = 0$),

$$\rho_e u_e \frac{\partial u^*}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) = -(\rho u)^* \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} dy.$$

On peut enfin se débarrasser du facteur $\rho_e u_e$ en introduisant la nouvelle abscisse

$$\xi = \int_{x_0}^x \frac{ds}{\rho_e u_e(s)}; \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{\rho_e u_e}$$

x_0 étant le point de départ du calcul. On trouve alors

$$\frac{\partial u^*}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) = -\frac{(\rho u)^*}{\rho_e u_e} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial (\rho u)}{\partial \xi} dy$$

avec $u_p^* = -u_e$, $u^*(\delta) = 0$ comme conditions aux limites.

Or, d'après ce qui a été dit (chapitre I, paragraphe 1, page 10) sur le caractère parabolique de cette équation, sa résolution doit s'effectuer à partir d'une distribution initiale des vitesses, considérée comme connue pour une abscisse $x = x_0$ près du bord d'attaque de l'obstacle. Il s'agit donc en principe de déterminer $\frac{\partial u^*}{\partial \xi}$ pour une abscisse ξ à laquelle on connaît la vitesse u comme fonction de y .

Ce quotient différentiel cherché s'exprime alors

$$\frac{\partial u^*}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) - \frac{(\rho u)^*}{\rho_e u_e} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial (\rho u)}{\partial \xi} dy.$$

5. A première vue, on pourrait croire que l'on n'a rien gagné en exprimant $\frac{\partial u^*}{\partial \xi}$ à l'aide de $\frac{\partial u}{\partial \xi}$.

Cependant, la connaissance de $\frac{\partial u^*}{\partial \xi}$ pour $y \sim \delta$ est sans grand intérêt. En effet, on sait que

$u^*(\delta) \equiv 0$ et $\frac{\partial u^*}{\partial \xi}(\delta) \equiv 0$; de plus, $\frac{\partial u^*}{\partial y}(\delta) \equiv \frac{\partial u}{\partial y}(\delta) \equiv 0$.

La région la plus intéressante est, sans doute, le voisinage de la paroi où $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_p$ est une des grandeurs caractéristiques de la couche-limite dont la variation avec ξ demande la connaissance, avec une bonne approximation, de $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ pour les faibles valeurs de y .

L'intérêt de la transformation de SCHRÖDER, ici généralisée pour le cas compressible, est justement de lever l'indétermination de l'équation non transformée à l'approche de $y = 0$, pour la renvoyer dans la zone près de $y = \delta$, beaucoup moins intéressante.

En effet, on a, pour $y \sim 0$:

$$\left| \frac{\partial u^*}{\partial \xi} \right| > \left| \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \frac{\partial u^*}{\partial \xi} \right| \gg \left| \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right| \sim \left| \frac{\rho v}{\rho_e u_e} \frac{\partial u}{\partial y} \right| = \left| \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial(\rho u)}{\partial \xi} dy \right|$$

$$\left| \frac{\partial u^*}{\partial \xi} \right| > \left| \frac{(\rho u)^*}{\rho_e u_e} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial \xi} \right| \gg \left| \frac{(\rho u)^*}{\rho_e u_e} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} \right|$$

Dans l'équation transformée pour $\frac{\partial u^*}{\partial \xi}$, c'est donc le terme $\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u^*}{\partial y} \right)$, connu avec précision, qui est prépondérant pour $y \sim 0$.

Le remplacement de la partie

$$-\frac{(\rho u)^*}{\rho_e u_e} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial(\rho u)}{\partial \xi} dy$$

du deuxième membre de l'expression de $\frac{\partial u^*}{\partial \xi}$ par une approximation, même grossière, n'influence donc pas beaucoup le résultat, et ceci d'autant moins que l'on se rapproche plus de $y = 0$.

Après le calcul de $\frac{\partial u^*}{\partial \xi}$ avec une telle approximation, la valeur ainsi obtenue peut servir à améliorer, par itération, l'approximation de départ et finalement le résultat. On a donc le droit de considérer, pour la détermination de $\frac{\partial u^*}{\partial \xi}$, l'expression :

$$-\frac{(\rho u)^*}{\rho_e u_e} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial(\rho u)}{\partial \xi} dy$$

comme une fonction donnée de ξ et y que l'on appellera $f(\xi, y)$.

6. Nous nous trouvons donc enfin en présence de l'équation

$$\frac{\partial u^*}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) = f(\xi, y)$$

pour u^* , équation connue dont nous cherchons la solution correspondant à une distribution $u^*(0, y)$ donnée et avec $u^*(\delta) = 0$, $u^*(0) = -u_e(\xi)$ comme conditions aux limites.

En effet, pour le calcul approché de u^* ainsi proposé, nous pouvons considérer μ comme une fonction connue de ξ et y , étant donné que dans notre cas $\mathcal{F} = 1$ (cf. page 42), l'énergie totale $j = \bar{j}$ est constante et que, par conséquent, $\mu = \mu(i) = \mu\left(j - \frac{u}{2}\right)$.

Or, u étant supposé fonction connue de y pour un certain ξ (celui où l'on veut déterminer $\frac{\partial u^*}{\partial \xi}$), $\mu = \mu\left(j - \frac{u^2}{2}\right) > 0$ l'est également.

Nous sommes donc ramenés pour notre équation à un problème de propagation de la chaleur bien posé qui possède donc une solution (et une seule) exacte.

Cette solution n'est pas explicite, mais elle est numériquement accessible, des difficultés telles que nous en rencontrerons dans le chapitre VII, paragraphe 2, ne se présentant pas dans le cas parabolique.

Cependant, dans le choix d'un procédé numérique, il faut donner la préférence, si possible, à celui dont on peut juger par avance des conditions de convergence.

Or, en deux dimensions, le procédé le mieux exploré de ce point de vue est celui des différences finies, auquel nous avons déjà fait allusion dans le chapitre II, paragraphe 3, p. 43 ss.

Il convient de citer, à ce propos, les travaux de LEVY, FRIEDRICHs et COURANT [4] et de L. COLLATZ [9] dont nous ferons usage à la suite.

7. Pour l'application de cette méthode, nous introduisons dans le plan (ξ, γ) un "réseau" orthogonal de lignes $\xi = mk$ et $\gamma = nh$ pour $m, n = 0, 1, 2, \dots$, k et h étant les distances (petites et encore à préciser) entre les lignes de ce réseau (voir fig. 9).

Le point d'intersection $\xi = mk, \gamma = nh$ de deux lignes sera appelé "noeud" du réseau, la partie du plan (ξ, γ) constituée du rectangle défini par les noeuds (m, n) (= abréviation du point $\xi = mk, \gamma = nh$), $(m+1, n)$, $(m, n+1)$ et $(m+1, n+1)$ une "maille" du réseau, et enfin le passage d'une ligne $\xi = mk$ à la suivante $\xi = (m+1)k$ un "pas" en direction de ξ ; de même, le passage d'une ligne $\gamma = nh$ à la suivante $\gamma = (n+1)h$ sera appelé un "pas" en direction de γ .

La valeur d'une fonction $F(\xi, \gamma)$ au point (m, n) sera indiquée par la notation $F_{m,n}$. Dans ce réseau, le quotient différentiel $\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)_{m,n}$ sera remplacé par l'un des 3 quotients de différences finies suivantes :

$$\begin{array}{ll} \frac{F_{m,n} - F_{m-1,n}}{k} & \text{"quotient arrière"} \\ \frac{F_{m+1,n} - F_{m,n}}{k} & \text{"quotient avant"} \\ \frac{F_{m+1,n} - F_{m-1,n}}{2k} & \text{"quotient central"} \end{array}$$

En principe, ces trois quotients sont, pour $k \rightarrow 0$, équivalents. Pratiquement, on donnera la préférence au quotient central. Nous rencontrerons cependant plus loin un cas où l'on choisira le quotient avant, permettant un passage de m à $m+1$ plus simple. Le remplacement des quotients différentiels par les quotients aux différences finies nécessite quelques précautions pour que l'on puisse être sûr que la solution de l'équation approchée converge vers la solution de l'équation différentielle.

La plus importante de ces conditions, établies par LEVY, FRIEDRICHs et COURANT [4], exige que, pour une équation parabolique du premier ordre en ξ et du deuxième ordre en γ , le rapport de k et h^2 soit pour $h \rightarrow 0$ une constante. Nous posons

$$k = \frac{h^2}{\Pi}$$

Avec ces notations, l'équation différentielle pour

$$\frac{\partial u^*}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\rho \frac{\partial u^*}{\partial \gamma} \right) = f(\xi, \gamma)$$

devient

$$\frac{u_{m+1,n}^* - u_{m,n}^*}{k} - \frac{\mu_{m,n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{u_{m,n+1}^* - u_{m,n}^*}{h} - \mu_{m,n-\frac{1}{2}} \cdot \frac{u_{m,n}^* - u_{m,n-1}^*}{h}}{h} = f_{m,n}$$

ou bien

$$u_{m+1,n}^* = \frac{h^2}{\Pi} f_{m,n} + \frac{1}{\Pi} \mu_{m,n+\frac{1}{2}} u_{m,n+1}^* + \frac{1}{\Pi} \mu_{m,n-\frac{1}{2}} u_{m,n-1}^* - \left[\frac{1}{\Pi} (\mu_{m,n+\frac{1}{2}} + \mu_{m,n-\frac{1}{2}}) - 1 \right] u_{m,n}^*$$

équation algébrique qui permet le calcul de $u_{m+1,n}^*$ à partir d'une distribution de $u_{m,\nu}^*$ connue pour m et toutes valeurs de ν .

8. L'idée conductrice pour la résolution de l'équation parabolique en u^* est alors la suivante :

Nous supposons connue une première approximation $u_0^*(\xi, y)$ de la solution cherchée, approximation qui satisfait aux conditions aux limites de la solution exacte. A l'aide de cette approximation u_0^* nous calculons $\mu_0(\xi, y)$ et $f_0(\xi, y)$ comme fonctions connues de ξ et y . L'équation

$$\frac{\partial u^*}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_0 \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) = f_0(\xi, y)$$

formée avec ces fonctions μ_0 et f_0 est linéaire et sera résolue, avec les conditions aux limites du problème, à l'aide des différences finies. On obtient ainsi une fonction $u_1^*(\xi, y)$ qui satisfait également aux conditions aux limites. Introduite en μ et f , elle conduit à $\mu_1^*(\xi, y)$ et $f_1(\xi, y)$, donc à l'équation

$$\frac{\partial u^*}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_1 \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) = f_1(\xi, y)$$

qui, à nouveau linéaire, sera résolue à l'aide des différences finies. On obtient ainsi u_2^* etc...

Cette idée demande une double justification :

1-Démonstration de la convergence du procédé de différences finies, avec fonctions μ_n et f_n de ξ et y données, vers la solution de l'équation différentielle formée avec les mêmes fonctions μ et f .

2-Démonstration de la convergence de la suite $u_1^*, u_2^*, u_3^*, \dots$ de fonctions approchées vers une fonction-limite u^* qui satisfait, tout en présentant les propriétés de régularité exigées, aux conditions aux limites du problème.

De plus, il faut trouver une fonction u_0^* de départ qui satisfasse aux conditions aux limites sans être trop fautive dès le début. Comme telle distribution de départ, nous pouvons choisir, par exemple, la fonction u_0^* que l'on obtient de la façon suivante :

Soit donnée, pour une valeur x_0 correspondant à $\xi = 0$, une distribution initiale u^* et sa dérivée $(\partial u^*)/(\partial \xi)$ dans le sens de ξ . Puisque, en principe, pour la résolution d'une équation parabolique, il est seulement nécessaire de disposer de la distribution initiale $u^*(0, y)$, la connaissance de $(\partial u^*)/(\partial \xi)$ est surabondante. Elle doit être par conséquent conforme au problème; nous verrons plus tard comment on peut la déterminer raisonnablement. A partir de u^* et $(\partial u^*)/(\partial \xi)$ pour $\xi = 0$, on calcule μ et f pour $\xi = 0$ comme fonctions connues de y . L'équation aux différences finies pour $u_{m+1, n}^*$ permet alors de déterminer, pour $m = 0$, $n \geq 1$ et un k petit mais fixe, les valeurs de u^* pour la ligne $\xi = k$. De plus, on sait a priori que $u_{1, 0}^* = -u_e$.

Les $u_{1, n}^*$ ainsi déterminés pour $n \geq 0$ permettent de calculer de façon approchée les valeurs de $(\partial u^*)/(\partial \xi)_{1, n}$ en les remplaçant par $(u_{1, n}^* - u_{0, n}^*)/(k)$. Ceci nous fournit une approximation de $\mu_{1, n}$ et $f_{1, n}$ et par conséquent une connaissance approchée des $u_{2, n}^*$, $u_{2, 0}^*$ étant égale à $-u_e$.

En continuant ainsi, on peut déterminer $u_{m, n}^*$ pour toutes les valeurs de $m \geq 0$ et $n \geq 0$.

9. Une certaine difficulté provient encore de ce que la valeur $\gamma_e = \delta(\xi)$ est inconnue, bien que l'on sache qu'elle est petite, et bien que son ordre de grandeur soit donné par la distribution initiale (connue).

Cependant, le fait que $u^*(\xi, y)$ atteint asymptotiquement la valeur 0 permet, dans un calcul numérique, de choisir un $\Delta \gg \delta$ jusqu'auquel nous étendons le calcul de la couche-limite.

Pratiquement, on choisira sur la ligne initiale $\xi = 0$ une valeur $\Delta_1 > \delta(0)$ telle qu'on ait encore $u^*(0, \Delta_1 - h) = 0$ à la précision du calcul numérique. On conservera cette valeur de Δ_1 aussi longtemps que $u^*(\xi, \Delta_1 - h) \sim 0$.

Aussitôt que, pour un certain ξ_1 , on trouve $u^*(\xi_1, \Delta_1 - h) \neq 0$ nous y ajoutons plusieurs noeuds $(\xi_1, \Delta_1 + h)$, $(\xi_1, \Delta_1 + 2h)$, $\dots$ $(\xi_1, \Delta_1 + s_1 h)$ dans lesquels on a encore $u^*(\xi_1, \Delta_1 + \sigma h) = 0$ ($\sigma = 1, \dots, s_1$). On continue le calcul avec ce nouveau $\Delta_2 = \Delta_1 + s_1 h$ jusqu'à ce qu'on ait pour

un certain ξ_2 , $u^*(\xi_2, \Delta_2 - h) \neq 0$. On ajoute alors s_2 nouveaux noeuds sur ξ_2 pour former une valeur Δ_3 et ainsi de suite. Puisque la profondeur L de l'obstacle, à laquelle correspond $\xi = \Xi$, ainsi que k sont des grandeurs finies, ce procédé trouve une fin, disons pour $\Delta_r \geq \Delta_i$.

Nous posons $\Delta = \Delta_r$. Etant donné que Δ , L , k et h sont des nombres fixes et finis, on n'a qu'un nombre fini de noeuds (m, n) dans la couche-limite auxquels il faut calculer les valeurs correspondantes de u^* .

Ces valeurs $u^*_{m,n}$ seront complétées par une fonction régulière qui prend, dans les noeuds (m, n) les valeurs $u^*_{m,n}$, soit par interpolation graphique qui suffira dans les cas pratiques, soit à l'aide d'un polynôme en ξ et y .

La fonction ainsi déterminée sera choisie comme première approximation u_0^* .

Il est intéressant de remarquer qu'il n'est pas indispensable d'avoir calculé u_0^* dans tout le domaine $0 \leq \xi \leq \Xi$, $0 \leq y \leq \Delta$ pour connaître u^* pour $\xi \leq mk$.

Si, par conséquent, le procédé aux différences finies est convergent, il suffira de choisir, a priori, k et h suffisamment petites pour l'ordre d'exactitude demandé, de calculer à partir de $\xi \leq \xi_0$, où l'on suppose connaître la fonction, les valeurs u_0^* pour $\xi_0 + k$, et d'effectuer, avant le calcul de u_0^* pour $\xi_0 + 2k$, l'itération de la page 45 pour obtenir déjà les valeurs $u_1^*(\xi_0 + k, y)$, $u_2^*(\xi_0 + k, y)$, etc...

On a ainsi l'avantage de pouvoir disposer, pour le calcul de $u_0^*(\xi_0 + ik, y)$, de valeurs déjà itérées de $u^*(\xi_0 + k, y)$, et ainsi de suite.

10. Les points à démontrer 1 et 2 de la page 45 peuvent en conséquence être remplacés par les suivants :

1* pour k et h constantes, nous considérons un pas fixe de m à $m+1$, en supposant que toutes les valeurs à premier indice $\leq m$ sont connues. Au pas considéré correspond l'équation aux différences finies :

$$u_{m+1,n}^* = \frac{h^2}{\Pi} f_{m,n} + \frac{1}{\Pi} \mu_{m,n+\frac{1}{2}} u_{m,n+1}^* + \frac{1}{\Pi} \mu_{m,n-\frac{1}{2}} u_{m,n-1}^* - \left[\frac{1}{\Pi} (\mu_{m,n+\frac{1}{2}} + \mu_{m,n-\frac{1}{2}}) - I \right] u_{m,n}^*$$

Dans cette équation, les valeurs $u_{m,n}^*$, $u_{m,n+1}^*$, $u_{m,n-1}^*$ et $\mu_{m,n\pm\frac{1}{2}}$ sont par hypothèse connues et ne sont plus soumises à l'itération. $f_{m,n}$ cependant doit être d'abord formée à l'aide de $u_{m+1,n}^*$. L'introduction de cette forme de $f_{m,n}$ dans l'équation donne $u_{1m-1,n}^*$, etc.

Il faut démontrer que les $u_{m+1,n}^*$ convergent pour $N \rightarrow \infty$ vers la solution exacte $u_{m+1,n}^*$ de l'équation aux différences finies ci-dessus.

2* Le procédé aux différences finies converge, pour μ et f données comme fonctions de ξ et y , vers la solution de l'équation différentielle formée avec ces mêmes fonctions μ et f .

Une remarque s'impose cependant :

La légitimité du remplacement des points 1 et 2 par les points 1* et 2* n'a pas été démontrée ci-dessus de façon rigoureuse. En effet, si l'on est en présence de deux réseaux différents dont les mailles ont les côtés k_1 et h_1 pour le premier et k_2 et h_2 pour le second, les fonctions $\mu(\xi, y)$ et $f(\xi, y)$ obtenues par le procédé de 1* ne sont pas les mêmes.

Cependant, les considérations des pages 42 et 43 sur les fonctions μ et f montrent qu'une variation faible de u dans les fonctions μ et f n'entraîne qu'une modification négligeable de l'équation à résoudre.

Si, d'autre part, u est supposé connu pour $\xi \leq \xi_0$ et si l'on pose $k_2 = 2k_1$, on arrive en vertu de 2* à des valeurs sensiblement* égales de $u^*(\xi_0 + k_2, y)$ et de $u^*(\xi_0 + 2k_1, y)$ pourvu que k_2 ait été choisi suffisamment petit.

*c'est-à-dire à la précision du calcul.

Nous pouvons donc — comme l'a fait K. SCHRÖDER en régime incompressible — admettre qu'une démonstration de 1* et 2* est suffisante pour la justification de la méthode ici proposée.

11. Démonstration de 1* :

Nous supposons dans

$$u_{m+1,n}^* = \frac{h^2}{\Pi} f_{m,n} + \frac{\mu_{m,n+\frac{1}{2}}}{\Pi} u_{m,n+1}^* + \frac{\mu_{m,n-\frac{1}{2}}}{\Pi} u_{m,n-1}^* + \left(1 - \frac{\mu_{m,n+\frac{1}{2}} + \mu_{m,n-\frac{1}{2}}}{\Pi}\right) u_{m,n}^*.$$

les valeurs de $u_{m,n}^*$, $u_{m,n+1}^*$, $u_{m,n-1}^*$ connues pour $n \geq 1$ avec une précision qui ne dépend que de la grandeur des mailles k et h . L'erreur dans leur détermination tend vers zéro lorsque $h, k \rightarrow 0$. Nous considérons k et h comme fixes, mais suffisamment petits.

De plus, nous faisons l'hypothèse que l'on connaît avec $u_{m,n}^*$, $u_{m,n\pm 1}^*$ aussi les valeurs de u_{in}^* et $u_{in\pm 1}^*$ pour $i \leq m$. Ceci peut conduire à une difficulté seulement pour $m=0$. En effet, nous devrions connaître, en plus de $u_{o,n}^*$, $u_{o,n\pm 1}^*$ des valeurs de $u_{-1,n}^*$. Ceci correspond d'ailleurs aux remarques de la p.45 sur la nécessité de connaître, au départ, u^* et $(\partial u^*)/(\partial \xi)$. Nous reviendrons à cette condition; pour le moment, nous considérons $u_{-1,n}^*$ comme connue (N.B. $\xi = 0 \nrightarrow x_0 > 0$).

Or, avec les $u_{i,n}^*$, $i \leq m$, $n \geq 1$ (nous rappelons que les valeurs pour $n=0$ sont sans intérêt, $u_{i,0}^* = -u_e$ étant connu), on connaît également $\mu_{m,n\pm\frac{1}{2}}$ et

$$\left(\frac{\partial u^*}{\partial y}\right)_{m,n} \sim \frac{u_{m,n+1}^* - u_{m,n-1}^*}{2h}$$

de nouveau avec la précision donnée par la grandeur de h . Reste à considérer, dans $f_{m,n}$, la valeur de $\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{m,n}$.

Pour commencer, on remplace $\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{m,n}$ par $\frac{u_{m,n} - u_{m-1,n}}{k}$.

C'est d'ailleurs ici qu'intervient, pour $m=0$, la nécessité de connaître $u_{-1,n}$. De la même façon, on remplace $\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial \xi}\right)_{mq}$ par $\frac{(\rho u)_{m,q} - (\rho u)_{m-1,q}}{2k}$.

On a alors :

$$f_{o,n} = \frac{u_{m,n+1} - u_{m,n-1}}{2h(\rho_e u_e)_m} \cdot h \cdot \sum_{q=1}^n \frac{(\rho u)_{m,q} - (\rho u)_{m-1,q}}{k} - \frac{(\rho u)_{m,n}^*}{(\rho_e u_e)_m} \frac{u_{m,n} - u_{m-1,n}}{k}$$

puis :

$$u_{1m+1,n}^* = \frac{h^2}{\Pi} f_{o,n} + \frac{\mu_{m,n+\frac{1}{2}}}{\Pi} u_{m,n+1}^* + \frac{\mu_{m,n-\frac{1}{2}}}{\Pi} u_{m,n-1}^* + \left(1 - \frac{\mu_{m,n+\frac{1}{2}} + \mu_{m,n-\frac{1}{2}}}{\Pi}\right) u_{m,n}^*$$

et

$$\rho_{1m+1,q} = \frac{(\rho_e i_e)_{m+1}}{j - \frac{u_{1m+1,n}^2}{2}}.$$

On forme avec ces valeurs :

$$f_{1m,n} = \frac{u_{m,n+1} - u_{m,n-1}}{2(\rho_e u_e)_m} \sum_{q=1}^n \frac{(\rho u)_{1m+1,q} - (\rho u)_{m-1,q}}{2k} - \frac{(\rho u)_{m,n}^*}{(\rho_e u_e)_m} \frac{u_{1m+1,n} - u_{m-1,n}}{2k}.$$

De façon générale, on a :

$$u_{nm+1,n}^* = \frac{\mu_{m,n+\frac{1}{2}}}{\Pi} u_{m,n+1}^* + \frac{\mu_{m,n-\frac{1}{2}}}{\Pi} u_{m,n-1}^* + \left(1 - \frac{\mu_{m,n+\frac{1}{2}} + \mu_{m,n-\frac{1}{2}}}{\Pi}\right) u_{m,n}^* + k f_{m,n} \quad n-1$$

avec

$$f_{m,n} = \frac{u_{m,n+1} - u_{m,n-1}}{2(\rho_e u_e)_m} \sum_{q=1}^n \frac{(\rho u)_{nm+1,q} - (\rho u)_{m-1,q}}{2k} - \frac{(\rho u)_{m,n}^*}{(\rho_e u_e)_m} \frac{u_{nm+1,n} - u_{m-1,n}}{2k}$$

On a alors :

$$\frac{u_{n+1}^*}{m+1, n} - \frac{u_{n+1}^*}{m+1, n} = \frac{1}{4(\rho_e u_e)_m} \left\{ (u_{m, n+1} - u_{m, n-1}) \sum_{q=1}^n [(\rho u)_{m+1, q} - (\rho u)_{m+1, q}] - 2(\rho u)_{m, n} (u_{m+1, n} - u_{m+1, n}) \right\}$$

formule de laquelle tous les termes non itérés ont automatiquement disparu.

$(\rho u)_{m+1, q}$ est une abréviation compréhensible pour $\rho_{m+1, q} \cdot u_{m+1, q}$; $(\rho_e u_e)_m = \rho_{em} \cdot u_{em}$. Nous simplifions encore les notations. En effet, ces valeurs itérées portent nécessairement le premier indice $m+1$ que nous omettons alors. De même, les valeurs non soumises à l'itération portent toutes le premier indice m que l'on peut, par conséquent, également supprimer. Nous conservons les indices m et $m+1$ seulement pour les valeurs à la frontière de la couche-limite, i_e , u_e , ρ_e , que l'on rencontrera par la suite, tantôt avec l'un, tantôt avec l'autre indice. Enfin, on a

$$\frac{u_{n+1}^*}{n} - \frac{u_n^*}{n} = \left(\frac{u_{n+1}}{n} - \frac{u_{em+1}}{n} \right) - \left(\frac{u_n}{n} - \frac{u_{em}}{n} \right) = \frac{u_{n+1}}{n} - \frac{u_n}{n}$$

différence que l'on notera

$$\frac{u_{n+1}^*}{n} - \frac{u_n^*}{n} = \frac{u_{n+1}}{n} - \frac{u_n}{n} = \Delta_{n+1}.$$

De façon analogue, nous trouvons $(\rho u)_n^* = (\rho u)_n - (\rho_e u_e)_m$, et en définitive

$$\Delta_{n+1} = \frac{1}{4(\rho_e u_e)_m} \left\{ (u_{n+1} - u_{n-1}) \sum_{q=1}^n [(\rho u)_q - (\rho u)_{n-1}] - 2[(\rho u)_n - (\rho_e u_e)_m] \Delta_n \right\}$$

Dans cette formule, nous allons analyser la différence $(\rho u)_q - (\rho u)_{n-1}$:

On a

$$\begin{aligned} (\rho u)_q - (\rho u)_{n-1} &= \rho_{nq} u_{nq} - \rho_{nq} u_{n-1q} + \rho_{nq} u_{n-1q} - \rho_{n-1q} u_{n-1q} = \\ &= \rho_{nq} (u_{nq} - u_{n-1q}) + u_{n-1q} (\rho_{nq} - \rho_{n-1q}) = \frac{(\rho_e i_e)_{m+1}}{i_{nq}} \Delta_{nq} + u_{n-1q} \frac{(\rho_e i_e)_{m+1} (i_{n-1q} - i_{nq})}{i_{nq} i_{n-1q}} \end{aligned}$$

compte tenu de ce que

$$\rho = \frac{\rho_e i_e}{i}$$

Or, $j = \bar{j} = i + \frac{u^2}{2}$ est pour $\mathcal{P} = I$ une constante connue; elle n'est donc pas soumise à l'iteration de façon que

$$i + \frac{u^2}{2} - i_{n-1} + \frac{u_{n-1}^2}{2} = 0$$

d'où

$$i_{n-1q} - i_{nq} = \frac{1}{2} (u_{nq}^2 - u_{n-1q}^2) = \frac{u_{nq} + u_{n-1q}}{2} \Delta_{nq}$$

Alors :

$$\begin{aligned} (\rho u)_q - (\rho u)_{n-1} &= \left\{ \frac{(\rho_e i_e)_{m+1}}{i_{nq}} + \frac{(\rho_e i_e)_{m+1}}{i_{nq}} \cdot \frac{u_{n-1q}}{i_{n-1q}} + \frac{u_{nq}}{2} \right\} \Delta_{nq} = \\ &= \frac{(\rho_e i_e)_{m+1}}{2} \frac{2 i_{n-1q} + u_{n-1q} (u_{nq} + u_{n-1q})}{i_{nq} i_{n-1q}} \Delta_{nq} \end{aligned}$$

ou, après introduction dans l'équation en Δ_{n+1} :

$$\Delta_{n+1} = \frac{1}{4(\rho_e u_e)_m} \left\{ (u_{n+1} - u_{n-1}) \sum_{q=1}^n \frac{(\rho_e i_e)_{m+1}}{2} \alpha_{nq} \Delta_{nq} + 2((\rho_e u_e)_m - (\rho u)_n) \Delta_n \right\}$$

avec

$$\alpha_{nq} = \frac{2 i_{n-1q} + u_{n-1q} (u_{nq} + u_{n-1q})}{i_{nq} i_{n-1q}}$$

Le dénominateur de α_{nq} ne disparaît pas. En effet, l'enthalpie n'est jamais nulle. Si la première approximation n'est pas trop mal choisie, on a $0 \leq u_{nq} \leq u_{em+1}$; de même, on peut déterminer une constante $\varepsilon > 0$ telle que $i_{nq} \geq \varepsilon i_{em+1}$ uniformément.

Dans le cas de la paroi athermane qui nous intéresse le plus, on a $\varepsilon = 1$. Par conséquent :

$$0 \leq \alpha_{nq} \leq \frac{2}{i_{em+1}} + 2 \left(\frac{u_e}{i_e} \right)_{m+1} = \alpha_{m+1} \leq \alpha$$

où α dénote le maximum de α_{m+1} pour $0 \leq \xi \leq \Xi$.

Enfin, nous introduisons, pour le maximum de $|\Delta_n|$ à $m+1$ fixe et pour $q = 1, 2, \dots$, le symbole Δ . Alors :

$$|\Delta_{n+1}| \leq \frac{1}{4(\rho_e u_e)_m} \left\{ \frac{(\rho_e i_e)_{m+1}}{2} \cdot n \cdot (u_{n+1} - u_{n-1}) \alpha_{m+1} + 2 |(\rho_e u_e)_m - (\rho u)_n| \right\} \Delta_n$$

Dans cette dernière expression, seulement les termes de l'accolade dépendent de n . Nous appelons cette accolade $4(\rho_e u_e)_m \beta_{m+1, n}$ et postulons $\beta_{m+1, n} \leq \beta_{m+1} < 1$ pour tous les n , d'où

$$\Delta_{n+1} \leq \beta_{m+1} \Delta_n \leq (\beta_{m+1})^2 \Delta_{n-1} \leq \dots \leq (\beta_{m+1})^n \Delta_1$$

Il s'ensuit alors que la limite

$$u_{m+1, n} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{m+1, n} = u_{1m+1, n} + (u_{2m+1, n} - u_{1m+1, n}) + (u_{3m+1, n} - u_{2m+1, n}) + \dots - u_{1m+1, n} + \Delta_{2m+1, n} + \Delta_{3m+1, n} + \dots$$

existe.

Reste donc à examiner la condition de convergence $\beta_{m+1} < 1$.

Si l'on tient compte de ce que $nh = \gamma_n$ et $\left| \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} \right| \sim \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|_n$ (d'autant plus exactement que h est petit), on a

$$\beta_{m+1, n} \sim \frac{1}{2(\rho_e u_e)_m} \left\{ \frac{(\rho_e i_e)_{m+1}}{2} \gamma_n \cdot \alpha_{m+1} \cdot \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|_n + |(\rho_e u_e)_m - (\rho u)_n| \right\} < 1$$

En général, on aura $(\rho u)_n \leq (\rho_e u_e)_m$. Alors :

$$\alpha_{m+1} \frac{(\rho_e i_e)_{m+1}}{2} \gamma_n \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|_n < (\rho_e u_e)_m + (\rho u)_n$$

Si la longueur du pas choisie est suffisamment petite, on a encore $(i_e)_{m+1} \sim (i_e)_m$ ainsi que $(u_e)_{m+1} \sim (u_e)_m$ de façon que l'on déduit de la définition de α_{m+1}

$$\alpha_{m+1} \frac{(i_e)_m}{2} \sim 1 + \left(\frac{u_e^2}{i_e} \right)_m = M_m$$

La condition de convergence de l'itération est, pour le pas de m à $m+1$, donnée par

$$M \cdot \gamma \cdot \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \cdot \rho_e < \rho_e u_e + \rho u$$

Dans certains cas d'écoulements supersoniques, on peut également rencontrer le cas $(\rho_e u_e)_m \leq (\rho u)_n$ qui conduit, de la même façon, à la condition légèrement différente

$$M \cdot \gamma \cdot \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \cdot \rho_e < 3 \rho_e u_e - \rho u$$

On trouve pour M des valeurs voisines de l'unité. En effet,

pour $u_e = 350 \text{ m/s}$ et $T_e = 250^\circ$, on a $M \sim 1,5$

$u_e = 350 \text{ m/s}$ et $T_e = 200^\circ$, on a $M \sim 1,6$

$u_e = 500 \text{ m/s}$ et $T_e = 250^\circ$, on a $M \sim 2,0$

$u_e = 1000 \text{ m/s}$ et $T_e = 200^\circ$, on a $M \sim 6,0$

La condition de convergence ne devient par conséquent gênante que pour des vitesses très élevées et des températures basses, comme il s'en présente dans les mouvements hyper-soniques.

12. Démonstration de 2* :

Soit :

$$\frac{\partial u^*}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) = f(\xi, y)$$

une équation différentielle dont les coefficients μ avec $0 < \mu < 1$ et $f(\xi, y)$ sont des fonctions connues qui admettent au moins une dérivée deuxième continue. Les conditions aux limites du problème sont données par

$$u^*(0, y) = u_0^*(y) \quad \text{et} \quad u^*(\xi, 0) = -u_e(\xi).$$

La solution exacte du problème $u^*(\xi, \gamma)$ existe et admet des dérivées jusqu'au quatrième ordre inclusivement. $u^*(\xi, \gamma)$ est bornée avec ses dérivées pour $\gamma \geq 0$ et $0 \leq \xi \leq \Xi$. Nous remplaçons l'équation différentielle par l'équation aux différences finies :

$$\frac{\check{u}_{m+1,n}^* - \check{u}_{m,n}^*}{k} - \frac{\mu_{m,n+\frac{1}{2}}}{h} \frac{\check{u}_{m,n+1}^* - \check{u}_{m,n}^*}{h} - \frac{\mu_{m,n-\frac{1}{2}}}{h} \frac{\check{u}_{m,n}^* - \check{u}_{m,n-1}^*}{h} = f_{m,n}$$

Ici et par la suite, $\check{u}^*$ est la solution de l'équation aux différences finies, cependant que u^* représente celle de l'équation différentielle. Avec la substitution de la page 44 ($k = \frac{h^2}{\Pi}$) on obtient :

$$\check{u}_{m+1,n}^* = \frac{h^2}{\Pi} f_{m,n} + \frac{1}{\Pi} \mu_{m,n+\frac{1}{2}} \check{u}_{m,n+1}^* + \frac{1}{\Pi} \mu_{m,n-\frac{1}{2}} \check{u}_{m,n-1}^* + \left[\frac{1}{\Pi} (\mu_{m,n+\frac{1}{2}} + \mu_{m,n-\frac{1}{2}}) - 1 \right] \check{u}_{m,n}^*$$

Dans cette équation, toutes les valeurs dont le premier indice est m , sont connues : $\mu_{m,n \pm \frac{1}{2}}$ et $f_{m,n}$, puisqu'il s'agit de fonctions données (ou considérées comme telles); $\check{u}_{m,n \pm 1}^*$ et $\check{u}_{m,n}^*$, puisqu'on les considère déjà obtenues par résolution de l'équation aux différences finies: pour $n \geq 1$, en partant de u_0^* , pour $n = 0$ en vertu de la condition aux limites pour $\gamma = 0$.

Nous essaierons d'évaluer l'erreur commise en substituant à l'équation différentielle celle aux différences finies.

Dans cette intention, nous développons la solution de l'équation exacte (donc différentielle) :

$$\begin{aligned} u_{m+1,n}^* &= u_{m,n}^* + k \left(\frac{\partial u^*}{\partial \xi} \right)_{m,n} + \frac{k^2}{2} \delta_{m+1} \text{Max}_{m-1}^{m+1} \left| \frac{\partial^2 u^*}{\partial \xi^2} \right| \quad (|\delta_{m+1}| \leq 1) \\ u_{m,n \pm 1}^* &= u_{m,n}^* \pm h \left(\frac{\partial u^*}{\partial \gamma} \right)_{m,n} + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial \gamma^2} \right)_{m,n} \pm \frac{h^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u^*}{\partial \gamma^3} \right)_{m,n} + \frac{h^4}{24} \delta_4^{(\pm)} \text{Max}_{n-1}^{n+1} \left| \frac{\partial^4 u^*}{\partial \gamma^4} \right|_{m,n} \\ \mu_{m,n \pm \frac{1}{2}} &= \mu_{m,n} \pm \frac{h}{2} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \gamma} \right)_{m,n} + \frac{h^2}{8} \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial \gamma^2} \right)_{m,n} \pm \frac{h^3}{48} \left(\frac{\partial^3 \mu}{\partial \gamma^3} \right)_{m,n} + \frac{h^4}{384} \delta_\mu^{(\pm)} \text{Max}_{n-1}^{n+1} \left| \frac{\partial^4 \mu}{\partial \gamma^4} \right|_{m,n} \\ & \quad (|\delta_4^{(\pm)}| \leq 1, \quad |\delta_\mu^{(\pm)}| \leq 1) \end{aligned}$$

Ces développements ne satisfont pas l'équation

$$\begin{aligned} & \frac{\check{u}_{m+1,n}^* - \check{u}_{m,n}^*}{k} - \frac{\mu_{m,n+\frac{1}{2}}}{h} \frac{\check{u}_{m,n+1}^* - \check{u}_{m,n}^*}{h} - \frac{\mu_{m,n-\frac{1}{2}}}{h} \frac{\check{u}_{m,n}^* - \check{u}_{m,n-1}^*}{h} = f_{m,n} \\ u_{m+1,n}^* \text{ et } u_{m,n \pm 1}^* & \text{ étant les solutions de l'équation exacte. On trouve facilement :} \\ & \frac{u_{m+1,n}^* - u_{m,n}^*}{k} - \frac{\mu_{m,n+\frac{1}{2}}}{h} \frac{u_{m,n+1}^* - u_{m,n}^*}{h} - \frac{\mu_{m,n-\frac{1}{2}}}{h} \frac{u_{m,n}^* - u_{m,n-1}^*}{h} = \\ & \left(\frac{\partial u^*}{\partial \xi} \right)_{m,n} - \left(\frac{\partial u^*}{\partial \gamma} \right)_{m,n} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \gamma} \right)_{m,n} - \mu_{m,n} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial \gamma^2} \right)_{m,n} + k \frac{\delta_{m-1}}{2} \text{Max}_{m-1}^{m+1} \left| \frac{\partial^2 u^*}{\partial \xi^2} \right| - \\ & - h^2 \left[\frac{1}{24} \left(\frac{\partial u^*}{\partial \gamma} \right)_{m,n} \left(\frac{\partial^3 \mu}{\partial \gamma^3} \right)_{m,n} + \frac{1}{8} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial \gamma^2} \right)_{m,n} \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial \gamma^2} \right)_{m,n} + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 u^*}{\partial \gamma^3} \right)_{m,n} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \gamma} \right)_{m,n} + \right. \\ & \left. + \frac{\delta_4^{(+)} + \delta_4^{(-)}}{24} \text{Max}_{n-1}^{n+1} \left| \frac{\partial^4 u^*}{\partial \gamma^4} \right|_{m,n} \mu_{m,n} + \frac{\delta_\mu^{(+)} + \delta_\mu^{(-)}}{384} u_{m,n}^* \text{Max}_{n-1}^{n+1} \left| \frac{\partial^4 \mu}{\partial \gamma^4} \right|_{m,n} \right] \\ & - h^3 \left[\frac{\delta_4^{(+)} - \delta_4^{(-)}}{48} \text{Max}_{n-1}^{n+1} \left| \frac{\partial^4 u^*}{\partial \gamma^4} \right|_{m,n} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \gamma} \right)_{m,n} + \frac{\delta_\mu^{(+)} - \delta_\mu^{(-)}}{384} \left(\frac{\partial u^*}{\partial \gamma} \right)_{m,n} \text{Max}_{n-1}^{n+1} \left| \frac{\partial^4 \mu}{\partial \gamma^4} \right|_{m,n} \right] + O(h^4) \end{aligned}$$

D'autre part, u^* est par hypothèse la solution de l'équation exacte. Alors, en tenant compte des trois premiers termes du deuxième membre :

$$\frac{u_{m+1,n}^* - u_{m,n}^*}{k} - \frac{\mu_{m,n+\frac{1}{2}} \frac{u_{m,n+1}^* - u_{m,n}^*}{h} - \mu_{m,n-\frac{1}{2}} \frac{u_{m,n}^* - u_{m,n-1}^*}{h}}{h} = f_{m,n} + k \frac{\delta_{m+1}}{2} \text{Max}_{m-1}^{m+1} \left| \frac{\partial^2 u^*}{\partial \xi^2} \right| - h^2 F_{m,n}$$

où $F_{m,n}$ représente une fonction de m et n qui, d'après l'hypothèse sur u^* , μ et leurs dérivées, est bornée pour $y \geq 0$ et $0 \leq \xi \leq \Xi$.

En désignant l'erreur cherchée — la différence entre $\tilde{u}_{m,n}^*$ et $u_{m,n}^*$ — par $\tilde{u}^* = u^* - \tilde{u}^*$, nous obtenons :

$$\frac{\tilde{u}_{m+1,n}^* - \tilde{u}_{m,n}^*}{k} - \frac{\mu_{m,n+\frac{1}{2}} \frac{\tilde{u}_{m,n+1}^* - \tilde{u}_{m,n}^*}{h} - \mu_{m,n-\frac{1}{2}} \frac{\tilde{u}_{m,n}^* - \tilde{u}_{m,n-1}^*}{h}}{h} = k \frac{\delta_{m+1}}{2} \text{Max}_{m-1}^{m+1} \left| \frac{\partial^2 u^*}{\partial \xi^2} \right| - h^2 F_{m,n}$$

ou bien, par suite de la relation $k = \frac{h^2}{\Pi}$:

$$\tilde{u}_{m+1,n}^* = \frac{\mu_{m,n+\frac{1}{2}}}{\Pi} \tilde{u}_{m,n+1}^* + \left(1 - \frac{\mu_{m,n+\frac{1}{2}} + \mu_{m,n-\frac{1}{2}}}{\Pi} \right) \tilde{u}_{m,n}^* + \frac{\mu_{m,n-\frac{1}{2}}}{\Pi} \tilde{u}_{m,n-1}^* + \frac{h^4}{\Pi^2} \frac{\delta_{m+1}}{2} \text{Max}_{m-1}^{m+1} \left| \frac{\partial^2 u^*}{\partial \xi^2} \right| - \frac{h^4}{\Pi} F_{m,n}$$

avec $\tilde{u}_{0,n}^* \equiv 0$ et $\tilde{u}_{m,0}^* = 0$, étant donné l'identité des conditions aux limites, à $\xi = 0$ et à $y = 0$, pour les fonctions u^* et $\tilde{u}^*$.

Jusqu'ici, le rapport $\frac{h^2}{k} = \Pi$ était indéterminé. Nous le fixons maintenant de façon que pour $y \geq 0$, $0 \leq \xi \leq \Xi$, on ait toujours :

$$0 \leq \frac{\mu_{m,n+\frac{1}{2}}}{\Pi} \leq 1, \quad 0 \leq 1 - \frac{\mu_{m,n+\frac{1}{2}} + \mu_{m,n-\frac{1}{2}}}{\Pi} \leq 1, \quad 0 \leq \frac{\mu_{m,n-\frac{1}{2}}}{\Pi} \leq 1.$$

μ étant positif et partout borné, ces conditions sont satisfaites par exemple si $\Pi \geq 2\mu_{m,n}$ pour tous les m et n possibles.

Nous posons encore $\text{Max}_{m,n} |F_{m,n}| = F$, $\tilde{u}_m^* = \text{Max}_n |\tilde{u}_{m,n}^*|$ et $R = \frac{1}{2\Pi^2} \text{Max}_{m-1}^{m+1} \left| \frac{\partial^2 u^*}{\partial \xi^2} \right| + \frac{F}{\Pi}$. On a alors immédiatement :

$$|\tilde{u}_{m+1,n}^*| \leq \left| \frac{\mu_{m,n+\frac{1}{2}}}{\Pi} \right| \tilde{u}_m^* + \left| 1 - \frac{\mu_{m,n+\frac{1}{2}} + \mu_{m,n-\frac{1}{2}}}{\Pi} \right| \tilde{u}_m^* + \left| \frac{\mu_{m,n-\frac{1}{2}}}{\Pi} \right| \tilde{u}_m^* + h^4 R = \tilde{u}_m^* \left(\frac{\mu_{m,n+\frac{1}{2}}}{\Pi} + 1 - \frac{\mu_{m,n+\frac{1}{2}} + \mu_{m,n-\frac{1}{2}}}{\Pi} + \frac{\mu_{m,n-\frac{1}{2}}}{\Pi} \right) + h^4 R = \tilde{u}_m^* + h^4 R.$$

Cependant, cette évaluation de $u_{m+1,n}^*$ est, sous sa dernière forme, indépendante de n . Nous pouvons donc écrire :

$$\tilde{u}_{m+1}^* \leq \tilde{u}_m^* + h^4 R$$

ou, en revenant à $m = 0$, où $\tilde{u}_0^* = 0$:

$$\tilde{u}_{m+1}^* \leq (m+1) h^4 R.$$

Pour arriver toujours à la même abscisse ξ , c'est-à-dire au même profil de vitesse, on a besoin d'un nombre variable de pas (qui dépend de k), en l'occurrence $m+1 = \xi/k = (\xi\Pi)/h^2$ pas.

La formule précédente s'écrit donc aussi :

$$\tilde{u}^*(\xi) \leq h^2 \cdot \xi \cdot \Pi \cdot R$$

ce qui signifie que l'erreur tend, pour (ξ, y) fixe, vers zéro comme le carré de h . Le procédé aux différences finies converge donc et donne la solution de l'équation différentielle. Le point 2^* est, par conséquent, démontré.

* Il est utile de rappeler que ξ n'a pas la dimension d'une longueur. Par conséquent, Π n'est pas un nombre mais possède une dimension, celle de la viscosité.

13. Il reste encore un détail à élucider : la connaissance initiale d'un profil $u_{0,n}^*$ et d'un autre profil $u_{-1,n}^*$ qui doivent être compatibles, l'équation parabolique ne nécessitant en principe qu'un seul profil de départ.

Or, il y a deux commencements possibles :

- avec point d'arrêt et
- sans point d'arrêt.

Dans le premier cas, la vitesse extérieure u_e est sûrement subsonique et voisine de zéro. Nous pouvons, par conséquent, assimiler l'écoulement à celui d'un fluide incompressible; de plus, nous pouvons avec une bonne approximation le représenter analytiquement sous la forme $u_e = ax^m$. Ceci nous permet de calculer, d'après FALKNER et SKAN, les profils de vitesse, cf. chapitre II, paragraphe 1.

Si x_0 est choisi suffisamment petit pour que $u_e(x_0) = ax_0^m$ et si k n'est pas trop grand, on peut prendre comme profils de départ, pour $\xi=0$ et $\xi=-k$, les u/u_e déterminés par la méthode de FALKNER et SKAN.

La comptabilité de ces deux profils est assurée avec une précision qui ne dépend que de la représentation $u_e = ax_0^m$. Celle-ci est déterminée par la petitesse de x_0 et de k .

Or, on verra dans le paragraphe suivant que l'influence de la condition initiale est faible. Les profils ainsi déterminés constituent donc une bonne approximation pour $u_{-1,n}$ et $u_{0,n}$.

Dans le deuxième cas, on trouve une vitesse extérieure qui ne varie pas beaucoup, au moins aussi longtemps que l'on peut considérer la tangente à la paroi de l'obstacle comme invariable. L'écoulement initial est alors celui de la plaque plane en régime compressible ou incompressible, cas dont nous nous occuperons dans la première partie du paragraphe suivant. Ce sont alors les deux profils de la plaque correspondant à $\xi=-k$ et à $\xi=0$ que l'on choisira comme distributions de départ.

Ainsi, on a définitivement terminé le cas $\mathcal{P} = 1$.

Il reste à signaler que les évaluations de l'erreur commise (p. 50 et p. 51) permettent après coup de déterminer la précision du calcul effectué. En effet, pour les exemples (voir fig. 3 à 8), cette précision est de l'ordre de 5 à 10%. Il est intéressant que le procédé permette sinon a priori, du moins a posteriori, de se rendre compte de l'erreur commise.

14. Nous nous sommes cependant proposés de calculer le cas $\mathcal{P} \neq 1$ (par exemple $\mathcal{P} = 0,725$).

En poursuivant l'idée de Mme FLÜGGE-LOTZ, exposée page 41, nous calculerons la correction du premier ordre sur l'enthalpie totale, j_1 , dont l'équation :

$$\bar{\rho}\bar{u} \frac{\partial j_1}{\partial x} + \bar{\rho}\bar{v} \frac{\partial j_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\mu} \frac{\partial j_1}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\mu}\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)$$

peut être mise sous la forme

$$\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e} \frac{\partial j_1}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\mu} \frac{\partial j_1}{\partial y} \right) = -\bar{\rho}\bar{v} \frac{\partial j_1}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\mu}\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right).$$

La condition aux limites pour $y = 0$ est :

ou bien $(j_1)_p$ = fonction donnée de ξ (cas relativement simple),

ou bien $\left(\frac{\partial j_1}{\partial y} \right)_p = \left(\frac{\partial j}{\partial y} \right)_p \cdot \frac{1}{1-\mathcal{P}}$ connue.

Nous traiterons cette dernière condition dans le cas spécialement important du problème du thermomètre, $\left(\frac{\partial j}{\partial y} \right)_p \equiv 0$, d'où $\left(\frac{\partial j_1}{\partial y} \right)_p \equiv 0$.

Comme condition initiale, nous avons $j_1(0, y) = (j(0, y) - j_0) \frac{1}{1-\mathcal{P}}$. Le principe de l'itération est le suivant :

Comme dans l'équation du mouvement, on pose :

$$-\bar{\rho}\bar{v}\frac{\partial j_1}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{\mu}\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) = g(\xi, y)$$

fonction que l'on considère comme connue.

En effet, le seul terme qui ne soit pas donné immédiatement est $\frac{\partial j_1}{\partial y}$; mais ce dernier n'est formé, dans le cas d'un procédé aux différences finies, qu'à l'aide de grandeurs déjà calculées (à premier indice m pour le pas de m à $m+1$).

Cependant, il reste une difficulté qui s'était déjà présentée dans la résolution de l'équation du mouvement : le terme décisif pour la résolution à l'aide de différences finies $(\partial j_1)/(\partial \xi)$ comporte un facteur $\bar{\rho}\bar{u}$ qui s'annule pour $y=0$, interdisant la détermination de $(\partial j_1)/(\partial \xi)$ et de j_1 dans la région la plus intéressante. Malheureusement, une transformation telle que celle utilisée pour l'équation du mouvement n'existe pas, $\bar{\rho}\bar{u}$ appartenant à la couche-limite des vitesses, cependant que j_1 fait partie de celle des températures.

Une application immédiate du procédé aux différences finies est donc impossible. Seulement, dans le cas particulier $(\partial^3 j_1)/(\partial y^3)_p = 0$, on arrive à démontrer la convergence du procédé.

Mais on peut réduire le cas général, $(\partial^3 j_1)/(\partial y^3)_p \neq 0$ à ce cas particulier en étudiant la fonction

$$j_1^*(\xi, y) = j_1(\xi, y) - \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 j_1}{\partial y^3}\right)_p y^3$$

qui obéit à une équation seulement légèrement modifiée, mais satisfait à nouveau à la condition:

$$\left(\frac{\partial^3 j_1^*}{\partial y^3}\right)_p \equiv 0.$$

15. Nous traitons d'abord le cas particulier :

L'équation à résoudre

$$\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e} \frac{\partial j_1}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{\mu}\frac{\partial j_1}{\partial y}\right) = g(\xi, y)$$

conduirait, sans précaution, à l'équation aux différences suivantes :

$$j_{1m+1,n} = j_{1m,n} + k\left(\frac{\rho_e u_e}{\bar{\rho}\bar{u}}\right)_{m,n} \cdot \frac{\bar{\mu}_{m,n+\frac{1}{2}} \frac{j_{1m,n+1} - j_{1m,n}}{h} - \bar{\mu}_{m,n-\frac{1}{2}} \frac{j_{1m,n} - j_{1m,n-1}}{h}}{h} + k\left(\frac{\rho_e u_e}{\bar{\rho}\bar{u}}\right)_{m,n} \cdot g_{m,n}$$

Cette équation ne permet pas de calculer $j_{1m+1,0}$ à l'aide des $j_{1m,n}$, puisque $(\bar{\rho}\bar{u})_{m,0} \equiv 0$ et l'équation est privée de signification.

Une remarque s'impose ici cependant :

Nous avons vu qu'il y a deux types de conditions aux limites (cf. p. 52). Dans le cas de $(j_1)_p$ donnée comme fonction connue de ξ et y , le calcul de $j_{1m+1,0}$ n'est plus nécessaire, la quantité en question étant connue d'avance. L'équation aux différences finies n'est utilisée que pour $n \geq 1$, où elle est parfaitement traitable. La difficulté ne surgit que dans le cas de $(\partial j_1)/(\partial y)_p$ donné, où elle ne peut être résolue que pour le problème particulier, mais spécialement intéressant, où $(\partial j_1)/(\partial y)_p \equiv 0$.

C'est cette hypothèse que nous ferons dans la suite; nous retenons toutefois que l'application de la méthode aux différences finies est immédiate et presque banale dans le cas où la température pariétale est connue, cas en général plus redouté que le problème du thermomètre.

Toutes les fonctions qui figurent dans l'équation à résoudre, $\bar{\rho}$, $\bar{\mu}$, $\bar{u}$, $\bar{v}$ et j_1 même, sont régulières pour $y=0$. En tenant compte des relations

$$(\bar{\rho}\bar{u})_p = 0, (\bar{\rho}\bar{v})_p = \left(\frac{\partial(\bar{\rho}\bar{v})}{\partial y}\right)_p = 0, \left(\frac{\partial\bar{\mu}}{\partial y}\right)_p = 0, \bar{u}_p = 0, \left(\frac{\partial j_1}{\partial y}\right)_p = 0$$

on peut, par conséquent, écrire les développements suivants, convergeant autour de $y=0$

$$\begin{aligned}\bar{\rho}\bar{u} &= a_1\gamma + a_2\gamma^2 + a_3\gamma^3 + \dots \\ \bar{\rho}\bar{v} &= b_2\gamma^2 + b_3\gamma^3 + \dots \\ \bar{\mu} &= \bar{\mu}_p + c_2\gamma^2 + c_3\gamma^3 + \dots \\ \bar{\mu}\bar{u}\bar{u}_y &= d_1\gamma + d_2\gamma^2 + d_3\gamma^3 + \dots \\ j_1 &= f_0 + f_2\gamma^2 + f_3\gamma^3 + \dots\end{aligned}$$

Seuls, les $f_0, f_2, f_3, \dots$ sont encore inconnues.

Ces développements réguliers pour $\gamma = 0$ convergent encore, dans un certain domaine, pour $\gamma < 0$. De plus, la loi de la constance de l'équation fonctionnelle garantit que les fonctions $\bar{\rho}\bar{u}, \bar{\rho}\bar{v}, \bar{\mu}, \bar{\mu}\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\gamma}$ et j_1 , définies pour $\gamma < 0$ par leurs séries, satisfont à la même équation différentielle.

Alors nous introduisons dans le plan ξ, γ un réseau de mailles k, h dont la longueur de pas en direction de ξ est une grandeur k_m variable avec m dans une certaine mesure encore à fixer. h est supposé constant dans tout le plan. Nous posons :

$$\Pi_m = \frac{h^2}{k_m}$$

Π_m restant à déterminer; cependant, nous limitons le choix des Π_m et k_m admissibles, pour h fixé par les conditions suivantes :

- 1) Π_m et le pas k_m qui suit une abscisse ξ , ne doivent dépendre que des pas précédents.
- 2) Jusqu'à une valeur quelconque $\xi \leq \Xi_0$, il doit être possible de réaliser $\sum_{m=1}^M k_m \geq \xi$, si M est suffisamment grand. Ξ_0 représente le décollement de la couche limite obtenu pour $\mathcal{Q} = 1$.
- 3) La différence $k_m - k_{m-1}$ est, pour ξ donné, un infiniment petit d'un ordre, par rapport à h , supérieur à celui de k_m et k_{m-1} , de façon que l'on peut remplacer, avec une erreur qui disparaît pour $h \rightarrow 0$, $\frac{j_{1m+1,n} - j_{1m-1,n}}{k_m + k_{m-1}}$ par $\frac{j_{1m+1,n} - j_{1m-1,n}}{2k_m}$

Ces hypothèses faites, nous considérons $j_1(\xi, \gamma)$ pour $\gamma \geq -\frac{h}{2}$, $0 \leq \xi < \Xi_0$, en prenant comme lignes de base pour notre réseau de mailles : $\xi = 0$ et $\gamma = -\frac{h}{2}$, de telle sorte que $F_{m,n}$ représente la valeur de F au point $\xi_m = \sum_{r=1}^m k_r$, $\gamma = (n - \frac{1}{2}) \cdot h$.

Aux noeuds de ce réseau, (m, n) avec m et n entiers, $(\bar{\rho}\bar{u})_{m,n}$ ne peut jamais s'annuler. La fonction reste au-dessus d'un minimum fini (qui dépend, naturellement, du choix de h).

Pour $\xi = 0$, la fonction $j_1(0, \gamma)$ est donnée. Elle peut, par conséquent, être prolongée jusqu'à $\gamma = -h/2$; on se servira, à cet effet, du développement connu autour de $\gamma = 0$.

Avec les précautions ci-dessus et la définition légèrement modifiée des indices m et n , nous revenons à notre équation aux différences finies. Sa solution, approximation de j_1 , sera appelée $\dot{j}_1$, l'erreur $J_1 = j_1 - \dot{j}_1$. On a alors

$$\begin{aligned}\dot{j}_{1m+1,n} &= \frac{\bar{\mu}_{mn+\frac{1}{2}}}{\Pi_m \left(\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e} \right)_{m,n}} \dot{j}_{1m,n+1} + \left(1 - \frac{\bar{\mu}_{mn+\frac{1}{2}} + \bar{\mu}_{mn-\frac{1}{2}}}{\Pi_m \left(\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e} \right)_{m,n}} \right) \dot{j}_{1m,n} + \\ &+ \frac{\bar{\mu}_{mn-1}}{\Pi_m \left(\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e} \right)_{m,n}} \dot{j}_{1m,n-1} + \frac{k_m}{\left(\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e} \right)_{m,n}} \cdot g_{m,n}.\end{aligned}$$

Pour rendre cette formule applicable à tous les cas, il faut encore déterminer $j_{1m,0}$ pour $m > 0$ (pour $m = 0$, on a - à cause de $(\partial^3 j_1)/(\partial y^3)_p = 0$ à la puissance h^5 près -

$$j_{1m,0} = \dot{j}_{1m,0} = j_{1m,1} = \dot{j}_{1m,1}.$$

On pose $\dot{j}_{1m,0} = \dot{j}_{1m,1}$. Alors, on peut toujours calculer $\dot{j}_{1m+1,n}$ pour $n \geq 1$. Mais la connaissance de $\dot{j}_{1m+1,0}$ donne immédiatement celle de $\dot{j}_{1m+1,1}$, d'où $\dot{j}_{1m+2,1}$, $\dot{j}_{1m+2,0}$ etc Nous comparons j_1 avec $\dot{j}_1$. Dans ce but, nous développons, comme précédemment dans l'équation du mouvement, $j_{1m,n \pm 1}$ et $\bar{\mu}_{m,n \pm 1/2}$ jusqu'à la 4^{ème} puissance, $j_{1m+1,n}$ jusqu'à la 2^{ème} puissance autour du point m, n .

On obtient, d'abord pour $n \neq 1$, exactement comme pour l'équation du mouvement, l'évaluation :

$$\begin{aligned} & \frac{(\bar{\rho}\bar{u})_{m,n}}{(\rho_e u_e)_m} \cdot \frac{j_{1m+1,n} - j_{1m,n}}{k_m} - \frac{\bar{\mu}_{mn+1/2} \frac{j_{1m,n+1} - j_{1m,n}}{h} - \mu_{mn-1/2} \frac{j_{1m,n} - j_{1m,n-1}}{h}}{h} = \\ & = \left(\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e} \right)_{m,n} \cdot \frac{k_m}{2} \cdot \delta_{m+1} \cdot \text{Max}_{m-1}^{m+1} \left| \frac{\partial^2 j_1}{\partial \xi^2} \right|_{m,n} - h^2 G_{m,n} \end{aligned}$$

où $G_{m,n}$ désigne une fonction de m et n qui est bornée supérieurement et inférieurement, puisque j_1 , $\bar{\mu}$ et leurs dérivées le sont par hypothèse.

On tire de cette équation, par une légère transformation :

$$\begin{aligned} j_{1m+1,n} = & \frac{\bar{\mu}_{mn+1/2}}{\Pi_m \left(\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e} \right)_{m,n}} j_{1m,n+1} + \left(1 - \frac{\mu_{mn+1/2} + \mu_{mn-1/2}}{\Pi_m \left(\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e} \right)_{m,n}} \right) j_{1m,n} + \frac{\bar{\mu}_{mn-1/2}}{\Pi_m \left(\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e} \right)_{m,n}} j_{1m,n-1} \\ & + \frac{h^4}{2 \Pi_m^2} \delta_{m+1} \text{Max}_{m-1}^{m+1} \left| \frac{\partial^2 j_1}{\partial \xi^2} \right|_{m,n} + \frac{h^4}{\Pi_m} \frac{G_{m,n}}{\left(\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e} \right)_{m,n}} \end{aligned}$$

Cette évaluation qui a été faite, ici, pour $n \neq 1$, sera analysée un peu plus précisément pour $n = 1$, c'est-à-dire pour la droite $y = h/2$. En effet, pour $n = 1$, la condition $\dot{j}_{1m,0} = \dot{j}_{1m,1}$ joue pour la première fois.

Nous remarquons d'abord que j_1 est définie, de même que l'équation différentielle, à laquelle elle satisfait, jusqu'à $y = -h/2$, donc à fortiori pour $y = h/2$.

On a donc, comme pour $n \neq 1$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e} \right)_{m,1} \cdot \frac{j_{1m+1,1} - j_{1m,1}}{k_m} - \frac{\mu_{m,1/2} \frac{j_{1m,2} - j_{1m,1}}{h} - \mu_{m,1/2} \frac{j_{1m,1} - j_{1m,0}}{h}}{h} = \\ & \left(\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e} \right)_{m,1} \left(\frac{\partial j_1}{\partial \xi} \right)_{m,1} - \left(\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial y} \right)_{m,1} \left(\frac{\partial j_1}{\partial y} \right)_{m,1} - \bar{\mu}_{m,1} \left(\frac{\partial^2 j_1}{\partial y^2} \right)_{m,1} + \left(\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e} \right)_{m,1} \cdot \frac{k_m}{2} \cdot \delta_{m+1} \text{Max}_{m-1}^{m+1} \left| \frac{\partial^2 j_1}{\partial \xi^2} \right|_{m,1} \\ & - h^2 G_{m,1} = g_{m,1} + \left(\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e} \right)_{m,1} \frac{k_m}{2} \cdot \delta_{m+1} \text{Max}_{m-1}^{m+1} \left| \frac{\partial^2 j_1}{\partial \xi^2} \right|_{m,1} - h^2 G_{m,1}. \end{aligned}$$

Par contre, l'évaluation de la fonction $\dot{j}_1$ change pour $n = 1$; en effet, $\dot{j}_{1m+1,1}$ doit être déterminé de façon que l'on ait :

$$\left(\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e} \right)_{m,1} \cdot \frac{j_{1m+1,1} - j_{1m,1}}{k_m} - \frac{\bar{\mu}_{m,1/2} \cdot \frac{j_{1m,2} - j_{1m,1}}{h} - \bar{\mu}_{m,1/2} \frac{j_{1m,1} - j_{1m,0}}{h}}{h} = g_{m,1}$$

D'autre part, on a par convention $\dot{j}_{1m,0} = \dot{j}_{1m,1}$, et alors

$$\left(\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e}\right)_{m,1} \cdot \frac{\dot{j}_{1m+1,1} - \dot{j}_{1m,1}}{k_m} - \frac{\bar{\mu}_{m1}^{1/2} \cdot \frac{\dot{j}_{1m,2} - \dot{j}_{1m,1}}{h}}{h} = g_m,$$

En soustrayant membre à membre cette équation et celle analogue, à laquelle satisfait j_1 , on obtient :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e}\right)_{m,1} \cdot \frac{J_{1m+1,1} - J_{1m,1}}{k_m} - \bar{\mu}_{m1}^{1/2} \frac{J_{1m,2} - J_{1m,1}}{h^2} + \bar{\mu}_{m1}^{1/2} \frac{j_{1m,1} - j_{1m,0}}{h^2} \\ &= \left(\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e}\right)_{m,1} \cdot \frac{k_m}{2} \cdot \delta_{m+1} \cdot \frac{m+1}{m-1} \cdot \text{Max}_{m-1} \left| \frac{\partial^2 j}{\partial \xi^2} \right|_{m,1} - h^2 G_{m,1} \\ & \left(\text{avec } k_m = \frac{h^2}{\Pi_m} \right) = \left(\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e}\right)_{m,1} \cdot \frac{h^2}{2\Pi_m} \cdot \delta_{m-1} \cdot \frac{m+1}{m-1} \cdot \text{Max}_{m-1} \left| \frac{\partial^2 j_1}{\partial \xi^2} \right|_{m,1} - h^2 G_{m,1}. \end{aligned}$$

d'où l'on trouve :

$$\begin{aligned} J_{1m+1,1} &= J_{1m,1} \left(1 - \frac{\bar{\mu}_{m1}^{1/2}}{\Pi_m \left(\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e}\right)_{m,1}} \right) + J_{1m,2} \frac{\bar{\mu}_{m1}^{1/2}}{\Pi_m \left(\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e}\right)_{m,1}} + \frac{h^4}{2\Pi_m^2} \delta_{m+1} \frac{m+1}{m-1} \cdot \text{Max}_{m-1} \left| \frac{\partial^2 j_1}{\partial \xi^2} \right|_{m,1} \\ & - \frac{h^4}{\Pi_m \left(\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e}\right)_{m,1}} G_{m,1} - \bar{\mu}_{m1}^{1/2} \frac{j_{1m,1} - j_{1m,0}}{h^2} \frac{h^2}{\Pi_m \left(\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e}\right)_{m,1}}. \end{aligned}$$

Pour évaluer l'erreur dans cette équation ainsi que dans celle pour $J_{1m+1,n}$ (p. 55), nous demandons

$$\frac{2\bar{\mu}_{mn}^{1/2}}{\Pi_m \left(\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e}\right)_{m,n}} \leq 1 \quad \text{ou} \quad \frac{\bar{\mu}_{m1}^{1/2}}{\Pi_m \left(\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e}\right)_{m,1}} \leq 1 \quad \text{selon le cas.}$$

Or, de la signification physique de ρu et de son développement page , on tire

$$\left(\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e}\right)_{m,n} > \left(\frac{a_1}{\rho_e u_e}\right)_m \cdot \frac{h}{2}$$

pour tous les $n \geq 1$, si h est suffisamment petit.

Si nous choisissons $\Pi_m = \frac{2}{h \left(\frac{a_1}{\rho_e u_e}\right)_m} \cdot 2 \cdot \text{Max}_n \bar{\mu}_{m,n}$, la condition pour les coefficients se trouve toujours satisfaite.

Puisque $a_1 \rightarrow 0$ quand ξ s'approche du décollement pour $\mathcal{L} = l$, la limite supérieure Ξ du domaine considéré doit être plus petite que Ξ_0 , mais peut en être aussi voisine que l'on veut.

Or, Π_m ainsi choisi satisfait-il aux trois conditions de page 54 ? La première de ces conditions est visiblement satisfaite. Pour que la deuxième le soit également, il doit, pour tout $\xi < \Xi_0$ exister un m tel que

$$\xi + \varepsilon = \sum_{r=1}^m k_r = \sum_{r=1}^m \frac{h^2}{\Pi_r} = \sum_{r=1}^m \frac{h^3 a_{1r}}{4 \text{Max}_n \bar{\mu}_{r,n} (\rho_e u_e)_r} \geq \sum_{r=1}^m \frac{h^3 \text{Min}_{0 < \xi < \Xi} a_{1r}}{4 \text{Max}_n (\text{Max}_{0 < \xi < \Xi} \bar{\mu}_{r,n} (\rho_e u_e)_r)}$$

Or, les minima et les maxima indiqués existent et sont différents de zéro aussi longtemps que $\Xi < \Xi_0$, d'où

$$\sum_{r=1}^n \frac{h^3 a_{1r}}{4 \text{Max}_n \bar{\mu}_{r,n} (\rho_e u_e)_r} \geq m \frac{h^3 \text{Min}_{\xi,n} a_{1r}}{4 \text{Max}_{\xi,n} (\bar{\mu}_{rn} (\rho_e u_e)_r)}$$

Si nous pouvons trouver m suffisamment grand pour que

$$m \frac{h^3 \text{Min } a_{1r}}{4 \text{Max}_{\xi, n} (\bar{\mu}_{rn} (\rho_e u_e)_r)} = \xi + \varepsilon, \text{ on a, a fortiori } \sum_{r=1}^m k_r \geq \xi + \varepsilon$$

Il existe donc toujours un m et un ε tels que $\sum_{r=1}^m k_r \geq \xi + \varepsilon$. On voit immédiatement qu'il suffit

de prendre

$$m = \left\lceil \frac{4 \text{Max}_{r, n} (\bar{\mu}_{rn} (\rho_e u_e)_r)}{h^3 \text{Min } a_{1r}} (\xi + \varepsilon) + 1 \right\rceil,$$

le symbole $[\dots]$ signifiant "le plus grand entier au-dessous de"

La troisième condition se vérifie aisément :

On a

$$k_m = \frac{h^3 a_{1m}}{4 \text{Max}_n \bar{\mu}_{mn} (\rho_e u_e)_m}, \quad k_{m-1} = \frac{h^3 a_{1m-1}}{4 \text{Max}_n \bar{\mu}_{m-1n} (\rho_e u_e)_{m-1}},$$

ou bien étant donné la faible variation du dénominateur

$$k_m - k_{m-1} \sim \frac{h^3}{c} (a_{1m} - a_{1m-1}) = \frac{h^3}{c} k_m \frac{a_{1m} - a_{1m-1}}{k_m} \sim \frac{h^3}{c} k_m \left(\frac{\partial a_1}{\partial \xi} \right)_m.$$

On voit donc que $k_m - k_{m-1}$ est de trois ordres plus petit que k_m .

Le choix de Π_m effectué est donc admissible dans le sens des trois conditions de la page 54.

Nous revenons maintenant aux deux évaluations de l'erreur, pour $J_{1m+1, n}$ et pour $J_{1m+1, 1}$. La forme de Π_m que l'on a choisie, montre immédiatement que, pour $n > 1$, les termes sans J_1 sont, au moins, du quatrième ordre en h . Dans la formule pour $J_{1m+1, 1}$, ceci est vrai seulement si $j_{1m, 1} - j_{1m, 0}$ commence, au plus tôt, par le terme du quatrième ordre en h ; en effet, ce dernier membre est alors de la forme

$$\bar{\mu}_m^{1/2} \frac{j_{1m, 1} - j_{1m, 0}}{h^2} \frac{h^2}{\Pi_m \left(\frac{\bar{\rho} \bar{u}}{\rho_e u_e} \right)_{m, 1}} = (j_{1m, 1} - j_{1m, 0}) \frac{\bar{\mu}_m^{1/2}}{\Pi_m \left(\frac{\bar{\rho} \bar{u}}{\rho_e u_e} \right)_m}$$

avec

$$\frac{\bar{\mu}_m^{1/2}}{\Pi_m \left(\frac{\bar{\rho} \bar{u}}{\rho_e u_e} \right)_{m, 1}} = \frac{\bar{\mu}_m^{1/2}}{\Pi_m \left(\frac{\bar{\rho} \bar{u}}{\rho_e u_e} \right)_{m, 1}} \frac{h \left(\frac{a_1}{\rho_e u_e} \right)_m}{4 \text{Max}_n \bar{\mu}_{m, n}} = \text{const} \times \frac{h}{\left(\frac{\bar{\rho} \bar{u}}{a_1} \right)_{n, 1}} = 2 \text{const} \times \frac{1}{1 + \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{h}{2} + \dots}$$

facteur dont le développement pour $y = 0$ commence par un terme sans h , mais différent de zéro.

Mais dans $j_{1m, 1} - j_{1m, 0}$, les deux termes de cette différence sont à prendre pour le même ξ_m , le premier terme pour $y = h/2$, le deuxième pour $y = -h/2$. On trouve

$$j_{1m, 1} - j_{1m, 0} = f_3 \cdot \frac{h^3}{4} + f_5 \cdot \frac{h^5}{16} + \dots,$$

développement dont le premier terme, en vertu de notre hypothèse $\left(\frac{\partial^3 j_1}{\partial y^3} \right)_p \equiv 0$ et, par conséquent, $f_3 \equiv 0$, est du cinquième ordre seulement.

Nous appelons, par la suite, $\text{Max}_n |J_{1m, n}| = J_m$, $\text{Max}_{m, n} |G_{m, n}| = G$ et tenons compte de ce que, pour $\xi \leq \Xi < \Xi_0$, existe toujours une constante e_1 telle que $\Pi_m \leq e_1 \cdot \frac{1}{h}$, et une autre e_2 , telle que $\Pi_m \left(\frac{\bar{\rho} \bar{u}}{\rho_e u_e} \right)_{m, n} \leq e_2 \text{Max}_{m, n} \bar{\mu}_{m, n}$. Il existe, par conséquent, un nombre Q qui ne dépend pas de h , tel que

$$Q > \frac{1}{2 \Pi_m^2} \text{Max}_{m, n} \left| \frac{\partial^2 j_1}{\partial \xi^2} \right| + \frac{G}{2 \text{Max}_{m, n} \bar{\mu}_{m, n}}.$$

Alors :

$$|J_{1m+1,n}| \leq \left| \frac{\bar{\mu}_{mn+\frac{1}{2}}}{\Pi_m(\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e})_{m,n}} \right| \cdot J_m + \left| 1 - \frac{\bar{\mu}_{mn+\frac{1}{2}} + \bar{\mu}_{mn-\frac{1}{2}}}{\Pi_m(\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e})_{m,n}} \right| \cdot J_m + \left| \frac{\bar{\mu}_{mn-\frac{1}{2}}}{\Pi_m(\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e})_{m,n}} \right| \cdot J_m + h^4 \cdot Q$$

pour $n \geq 2$, d'où, à cause de la détermination de Π_m ,

$$|J_{1m+1,n}| \leq \frac{\bar{\mu}_{mn+\frac{1}{2}}}{\Pi_m(\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e})_{m,n}} J_m + \left(1 - \frac{\bar{\mu}_{mn+\frac{1}{2}} + \bar{\mu}_{mn-\frac{1}{2}}}{\Pi_m(\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e})_{m,n}} \right) \cdot J_m + \frac{\bar{\mu}_{mn-\frac{1}{2}}}{\Pi_m(\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e})_{m,n}} \cdot J_m + h^4 Q = J_m + h^4 Q.$$

De façon analogue, on trouve :

$$|J_{1m+1,1}| \leq \left(1 - \frac{\bar{\mu}_{m1+\frac{1}{2}}}{\Pi_m(\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e})_{m1}} \right) \cdot J_m + \frac{\bar{\mu}_{m1+\frac{1}{2}}}{\Pi_m(\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e})_{m1}} \cdot J_m + h^4 Q + h^5 \left(\frac{f_5}{16} + \dots \right)$$

Or, f_5 est bornée comme fonction de ξ . Pour h suffisamment petit, on a $Q + h \left(\frac{f_5}{16} + \dots \right) \leq 2Q = P$, d'où, indépendamment de n :

$$J_{m+1} \leq J_m + h^4 \cdot P$$

Puisque $J_1 = 0$, on a

$$J_{m+1} \leq (m+1) h^4 P$$

Pour arriver à un ξ déterminé, $\xi \leq \Xi$, on a besoin de m pas, avec :

$$m = \left\lceil \frac{4 \text{Max}(\bar{\mu}_{rn}(\rho_e u_e)_r)}{h^3 \text{Min}_{\xi} a_{1r}} (\xi + \varepsilon) + 1 \right\rceil$$

L'erreur peut être, par conséquent, majorée par

$$J_{m+1} \leq h^4 P + \frac{4 \text{Max}(\bar{\mu}_{rn}(\rho_e u_e)_r)}{\text{Min}_{\xi} a_{1r}} (\xi + \varepsilon) \cdot h P \rightarrow 0$$

pour $h \rightarrow 0$.

En particulier, pour $h \rightarrow 0$, $j_{1m,1}^* \rightarrow (j_1)_p$, puisque, en effet, la distance de la paroi, à laquelle on détermine $j_{1m,1}^*$ n'est que $\frac{h}{2} \rightarrow 0$.

Il a été, au total, démontré que le procédé aux différences finies fournit, dans le cas

$$\left(\frac{\partial^3 j_1^*}{\partial y^2} \right)_p \equiv 0,$$

la solution de l'équation différentielle. Ceci est vrai pour toute la couche limite, y compris la paroi.

16. Nous considérons maintenant le deuxième cas, $\left(\frac{\partial^3 j_1^*}{\partial y^2} \right)_p$ quelconque.

Un artifice nous permettra de réduire ce cas au cas précédent :

Nous introduisons la nouvelle fonction

$$j_1^*(\xi, \gamma) = j_1(\xi, \gamma) - f_3(\xi) \cdot \gamma^3.$$

Cette fonction satisfait visiblement aux conditions suivantes :

- a) $\left(\frac{\partial j_1^*}{\partial \xi} \right)_p = \left(\frac{\partial j_1}{\partial \xi} \right)_p$
- b) $j_1^*(\xi, 0) = j_1(\xi, 0)$
- c) $\frac{\partial j_1^*}{\partial \gamma}(\xi, 0) = \frac{\partial j_1}{\partial \gamma}(\xi, 0)$ (condition aux limites à la paroi)

$$d) \frac{\partial^2 j_1^*}{\partial y^2}(\xi, 0) = \frac{\partial^2 j_1}{\partial y^2}(\xi, 0)$$

$$e) \frac{\partial^3 j_1^*}{\partial y^3}(\xi, 0) = \frac{\partial^3 j_1}{\partial y^3}(\xi, 0) - 6 f_3(\xi) = 0$$

Elle obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e} \frac{\partial j_1^*}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\mu} \frac{\partial j_1^*}{\partial y} \right) = -\bar{\rho}\bar{v} \frac{\partial j_1^*}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\mu}\bar{u}\bar{u}_y) - \frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e} y^3 \cdot f'_3(\xi) - \\ - 3 y^2 f_3(\xi) \bar{\rho}\bar{v} + 3 y^2 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial y} f_3(\xi) + 6 \bar{\mu} y f_3(\xi),$$

équation, dont nous abrégons le deuxième membre par la notation $g^*(\xi, y)$.

Cette équation peut être résolue à l'aide du calcul aux différences finies, par suite de la condition $\left(\frac{\partial^3 j_1^*}{\partial y^3} \right)_p \equiv 0$, pourvu que $g^*(\xi, y)$ soit connue. La réduction au cas précédent est donc, en principe, déjà effectuée. Reste la détermination de $g^*(\xi, y)$.

Dans cette fonction figurent, comme expressions encore indéterminées, $\left(\frac{\partial j_1^*}{\partial y} \right)$, $f_3(\xi)$, $f'_3(\xi)$.

Or, l'équation pour j_1 , page 52, fournit, après dérivation par rapport à y , comme relation à la paroi

$$\left(\frac{\partial^3 j_1}{\partial y^3} \right)_p = \frac{1}{\rho_e u_e} \left[\frac{\bar{\rho}_p}{\bar{\mu}_p} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_p \left(\frac{\partial j_1}{\partial \xi} \right)_p + \frac{3}{\bar{\mu}_p} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_p \frac{\partial p_e}{\partial \xi} \right]$$

d'où l'on tire

$$6 f_3(\xi) = \left(\frac{\partial^3 j_1}{\partial y^3} \right)_p = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_p \frac{\bar{\rho}_p}{\bar{\mu}_p} \frac{1}{\rho_e u_e} \left(\frac{\partial j_1}{\partial \xi} \right)_p + 3 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_p \frac{\partial p_e}{\partial \xi} \frac{1}{\bar{\mu}_p} \frac{1}{\rho_e u_e} = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_p \frac{\bar{\rho}_p}{\bar{\mu}_p} \frac{1}{\rho_e u_e} \left(\left(\frac{\partial j_1^*}{\partial \xi} \right)_p + \frac{3}{\bar{\rho}_p} \frac{\partial p_e}{\partial \xi} \right)$$

après l'emploi de la relation a), pour obtenir $\left(\frac{\partial j_1}{\partial \xi} \right)_p = \left(\frac{\partial j_1^*}{\partial \xi} \right)_p$.

On voit que $6 f_3(\xi)$ ne contient, comme fonction inconnue, que $\left(\frac{\partial j_1^*}{\partial \xi} \right)_p$; naturellement, en $f'_3(\xi)$, on trouvera également $\left(\frac{\partial^2 j_1^*}{\partial \xi^2} \right)_p$. En fin de compte, il s'agit de déterminer $\frac{\partial j_1^*}{\partial y}$, $\left(\frac{\partial j_1^*}{\partial \xi} \right)_p$ et $\left(\frac{\partial^2 j_1^*}{\partial \xi^2} \right)_p$ pour connaître $g^*(\xi, y)$.

On peut employer à cet effet un procédé d'itération semblable à celui utilisé pour l'équation des vitesses. Comme dans le cas des vitesses, il faut démontrer :

- 1) la convergence de l'itération à longueur de pas fixe,
- 2) la convergence du procédé aux différences, lorsque la fonction $g^*(\xi, y)$ est connue.

Le deuxième de ces deux points vient d'être démontré sous l'hypothèse $\left(\frac{\partial^3 j_1^*}{\partial y^3} \right)_p \equiv 0$, hypothèse vérifiée par la fonction $j_1^*(\xi, y)$ introduite page 58 et traitée ici.

Nous démontrons alors le premier point. Il s'agit donc de définir un procédé d'itération pour le calcul de $\frac{\partial j_1^*}{\partial y}$, $\left(\frac{\partial j_1^*}{\partial \xi} \right)_p$ et $\left(\frac{\partial^2 j_1^*}{\partial \xi^2} \right)_p$ et de prouver sa convergence.

En remplaçant l'équation différentielle en j_1^* , page , par une équation aux différences finies, à l'aide d'un réseau analogue à celui du cas $\left(\frac{\partial^3 j_1^*}{\partial y^3} \right)_p \equiv 0$, c'est-à-dire : dont le deuxième indice 1 indique la ligne $y = \frac{h}{2}$, on obtient une fonction approchée $\dot{j}_1^*$ qui satisfait, avec $\frac{h^2}{k_m} = \Pi_m$,

à l'équation

$$j_{1^{m+1},n}^* = \frac{\bar{\mu}_{mn+\frac{1}{2}}}{\Pi_m(\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e})_{m,n}} j_{1^{m,n+1}}^* + \left(1 - \frac{\bar{\mu}_{mn+\frac{1}{2}} + \bar{\mu}_{mn-\frac{1}{2}}}{\Pi_m(\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e})_{m,n}}\right) j_{1^{m,n}}^* + \frac{\bar{\mu}_{mn-\frac{1}{2}}}{\Pi_m(\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e})_{m,n}} j_{1^{m,n-1}}^* \\ - \frac{km}{(\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e})_{m,n}} \left[-\bar{\rho}\bar{v} \frac{\partial j_1^*}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\mu}\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}) - \frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\rho_e u_e} y^3 f_3'(\xi) - (3\bar{\rho}\bar{v}y^2 - 3\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial y} y^2 - 6\bar{\mu}y) f_3(\xi) \right]$$

Comme dans l'itération des vitesses, nous pouvons supposer que toutes les grandeurs, dont le premier indice est m , sont déjà connues avec une précision qui ne dépend que de la longueur de pas h , mais qui n'est plus affectée par l'itération. Ceci est également vrai pour

$$\frac{j_{1^{m,n+1}}^* - j_{1^{m,n-1}}^*}{2h} \sim \frac{\partial j_1^*}{\partial y} \text{ et } \frac{j_{1^{m,n+1}}^* + j_{1^{m,n-1}}^* - 2j_{1^{m,n}}^*}{h^2} \sim \frac{\partial^2 j_1^*}{\partial y^2},$$

expressions que nous noterons, pour simplifier l'écriture, par

$$\frac{\partial j_1^*}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial^2 j_1^*}{\partial y^2}. \text{ En particulier on a } \left(\frac{\partial j_1^*}{\partial y}\right)_p = \left(\frac{\partial j_1}{\partial y}\right)_p \text{ et } \left(\frac{\partial^2 j_1^*}{\partial y^2}\right)_p = \left(\frac{\partial^2 j_1}{\partial y^2}\right)_p.$$

L'imperméabilité thermique de la paroi entraîne $\left(\frac{\partial j_1}{\partial y}\right)_p \equiv 0$ et on a, avec une notation facilement intelligible,

$$(j_{1^{m+1}}^*)_p = j_{1^{m+1},1}^* - \frac{h^2}{4} \left(\frac{\partial^2 j_1}{\partial y^2}\right)_{p_{m+1}} - \dots$$

$$(j_{1^m}^*)_p = j_{1^m,1}^* - \frac{h^2}{4} \left(\frac{\partial^2 j_1}{\partial y^2}\right)_{p_m} - \dots$$

$$(j_{1^{m-1}}^*)_p = j_{1^{m-1},1}^* - \frac{h^2}{4} \left(\frac{\partial^2 j_1}{\partial y^2}\right)_{p_{m-1}} - \dots$$

Dans le deuxième membre de l'équation, page 60, pour $j_{1^{m+1},n}^*$ nous pouvons donc écrire, au lieu de $j_{1^{m,n}}^*, \left(\frac{\partial j_1^*}{\partial y}\right)_{m,n}$, les valeurs $j_{1^{m,n}}^*, \left(\frac{\partial j_1^*}{\partial y}\right)_{m,n}$ considérées comme déjà connues.

Restent les termes $f_3(\xi)$ et $f_3'(\xi)$ qui se calculent à l'aide de $\left(\frac{\partial j_1^*}{\partial \xi}\right)_p$ et de $\left(\frac{\partial^2 j_1^*}{\partial \xi^2}\right)_p$, cf. p. .

Si l'on remplace alors $\left(\frac{\partial j_1^*}{\partial \xi}\right)_p$ par :

$$\frac{(j_{1,m}^*)_p - (j_{1^{m-1}}^*)_p}{k_m} = \frac{j_{1^m,1}^* - j_{1^{m-1},1}^*}{k_m} - \frac{h^2}{4k_m} \left\{ \left(\frac{\partial^2 j_1}{\partial y^2}\right)_{mp} - \left(\frac{\partial^2 j_1}{\partial y^2}\right)_{m-1p} \right\}$$

et $\left(\frac{\partial^2 j_1^*}{\partial \xi^2}\right)_p$ par :

$$\frac{(j_{1^m}^*)_p - 2(j_{1^{m-1}}^*)_p + (j_{1^{m-2}}^*)_p}{k_m^2} = \frac{j_{1^m,1}^* - 2j_{1^{m-1},1}^* + j_{1^{m-2},1}^*}{k_m^2} - \frac{h^2}{4k_m^2} \left\{ \dots \right\}$$

on obtient, pour f_3 et f_3' , des fonctions approchées que l'on écrira f_3^1 et $f_3'^1$, et qui, avec $\frac{\partial j^*}{\partial y}$ connu, nous fournissent une première approximation $j_{1^{m+1},1}^*$ de $j_{1^{m+1},n}^*$, quand on suppose

comme dans le cas précédent, $j_{1m,0}^* = j_{1m,1}^*$ et, par conséquent, aussi $j_{1m,0}^* = j_{1m,1}^*$.

Pour $N > 1$ on forme alors f_3^N et f_3^{N-1} à l'aide de $j_{1m+1,1}^{N-1}$ en remplaçant $\left(\frac{\partial j_1^*}{\partial \xi}\right)_p$ et $\left(\frac{\partial^2 j_1^*}{\partial \xi^2}\right)_p$ par les quotients centraux désormais disponibles :

$$\frac{j_{1m+1p}^* - j_{1m-1p}^*}{2k_m} = \frac{j_{1m+1,1}^{N-1} - j_{1m-1,1}^{N-1}}{2k_m} - \frac{h^2}{8k_m} \left\{ \left(\frac{\partial^2 j_1}{\partial y^2}\right)_{m+1} - \left(\frac{\partial^2 j_1}{\partial y^2}\right)_{m-1} \right\} - \dots$$

$$\frac{j_{1m+1p}^* - 2j_{1mp}^* + j_{1m-1p}^*}{k_m^2} = \frac{j_{1m+1,1}^{N-1} - 2j_{1m,1}^{N-1} + j_{1m-1,1}^{N-1}}{k_m^2} - \frac{h^2}{4k_m^2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 j_1}{\partial y^2}\right)_{m+1} - 2\left(\frac{\partial^2 j_1}{\partial y^2}\right)_m + \left(\frac{\partial^2 j_1}{\partial y^2}\right)_{m-1} \right\} \dots$$

Il faut ici noter que la correction $\frac{h^2}{8k_m} \cdot \{\dots\}_p$ resp. $\frac{h^2}{4k_m^2} \cdot \{\dots\}_p$ est la même pour toutes les itérations. A la formation des différences entre N-ième et (N-1)-ième itérations, ces corrections disparaissent en dépit de l'indice $m+1$ de $\left(\frac{\partial^2 j_1}{\partial y^2}\right)_{m+1}$. La connaissance de cette expression n'est, d'ailleurs, pas exigée; il suffit de savoir qu'elle est bornée.

L'introduction de f_3^N et f_3^{N-1} ainsi déterminées dans l'équation pour $j_{1m+1,n}^*$ donne $j_{1m+1,n}^*$ etc..

On voit, d'ailleurs, qu'il suffit d'effectuer cette itération pour $n = 1$. Si elle converge, on peut calculer, avec les f_3 et f_3' définitives, $j_{1m+1,n}^*$ pour $n > 1$, sans itération.

On a alors $\gamma = \frac{h}{2}$, $(\bar{\rho}u)_{m,1} = a_1 \frac{h}{2} + \dots$, $(\bar{\rho}v)_{m,1} = b_2 \cdot \frac{h^2}{4} + \dots$

Nous trouvons alors :

$$f_3^N - f_3^{N-1} = \frac{1}{6} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_p \frac{\bar{\rho}_p}{\bar{\mu}_p} \frac{1}{\rho_e u_e} \frac{j_{1m+1,1}^{N-1} - j_{1m+1,1}^{N-2}}{2k_m}$$

et

$$f_3^N - f_3^{N-1} = \frac{1}{6} \left\{ \left[\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right)_p \frac{\bar{\rho}_p}{\bar{\mu}_p} \frac{1}{\rho_e u_e} + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_p \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\bar{\rho}_p}{\bar{\mu}_p} \frac{1}{\rho_e u_e} \right) \right] \frac{j_{1m+1,1}^{N-1} - j_{1m+1,1}^{N-2}}{2k_m} + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_p \frac{\bar{\rho}_p}{\bar{\mu}_p} \frac{1}{\rho_e u_e} \frac{j_{1m+1,1}^{N-1} - j_{1m+1,1}^{N-2}}{k_m^2} \right\}$$

d'où

$$j_{1m+1,1}^* - j_{1m+1,1}^{N-1} = - \frac{k_m h^3}{48} \left[\left\{ \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial y} \right)_p \frac{\bar{\rho}_p}{\bar{\mu}_p} \frac{1}{\rho_e u_e} + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_p \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\bar{\rho}_p}{\bar{\mu}_p} \frac{1}{\rho_e u_e} \right) \right\} \frac{1}{2k_m} + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_p \frac{\bar{\rho}_p}{\bar{\mu}_p} \frac{1}{\rho_e u_e} \frac{1}{k_m^2} \right] (j_{1m+1,1}^{N-1} - j_{1m+1,1}^{N-2})$$

$$- \frac{k_m}{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_p \frac{\bar{\rho}_p}{\bar{\mu}_p} \frac{1}{\rho_e u_e}} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_p \frac{\bar{\rho}_p}{\bar{\mu}_p} \frac{1}{\rho_e u_e} \frac{1}{2k_m} \left[3(\bar{\rho}v)_{m,1} \cdot \frac{h^2}{4} - 3 \left(\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial y} \right)_{m,1} \frac{h^2}{4} - 6 \bar{\mu}_{m,1} \cdot \frac{h}{2} \right] (j_{1m+1,1}^{N-1} - j_{1m+1,1}^{N-2})$$

ou bien

$$j_{1m+1,1}^* - j_{1m+1,1}^{N-1} = \left[- \left\{ \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial y} \right)_p \frac{\bar{\rho}_p}{\bar{\mu}_p} \frac{1}{\rho_e u_e} + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_p \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\bar{\rho}_p}{\bar{\mu}_p} \frac{1}{\rho_e u_e} \right) \right\} \frac{h^3}{96} - \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_p \frac{\bar{\rho}_p}{\bar{\mu}_p} \frac{1}{\rho_e u_e} \frac{h^3}{48k_m} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{12} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_p \frac{\bar{\rho}_p}{\bar{\mu}_p} \left(3(\bar{\rho}v)_{m,1} \frac{h^2}{4} - 3 \left(\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial y} \right)_{m,1} \frac{1}{(\bar{\rho}u)_{m,1}} \frac{h^2}{4} - \left(\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial y} \right)_{m,1} \bar{\mu}_{m,1} \frac{h}{2} \right) \right] (j_{1m+1,1}^{N-1} - j_{1m+1,1}^{N-2})$$

Regardons les termes du deuxième membre :

$\left\{ \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial y} \right)_p \frac{\bar{\rho}_p}{\bar{\mu}_p} \frac{1}{\rho_e u_e} + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_p \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\bar{\rho}_p}{\bar{\mu}_p} \frac{1}{\rho_e u_e} \right) \right\} \cdot \frac{h^3}{96}$ se comporte comme h^3 , puisque, en effet, l'expression

entre accolades ne dépend ni de h ni de l'itération. Ce terme peut être rendu aussi petit que l'on veut, par le seul choix de h .

$(\bar{\rho}\bar{v})_{m,1}$ se comporte comme h ; le terme $\frac{1}{12}(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y})_p \frac{\bar{\rho}_p}{\bar{\mu}_p} \cdot 3 \cdot (\bar{\rho}\bar{v})_{m,1} \frac{h^2}{4}$ devient petit comme h^3 .

Dans $3(\frac{\partial\bar{\mu}}{\partial y})_p \frac{1}{\bar{\rho}\bar{u}} \frac{h^2}{4}$, le dénominateur $\bar{\rho}\bar{u}$ se comporte comme h , le terme entier par conséquent comme $\frac{h^2}{h} \sim h$, décroît donc avec h vers zéro.

Reste du coefficient de $j_{1m+1,1}^{N-1} - j_{2m+1,1}^{N-2}$ du deuxième membre à analyser :

$$-\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right)_p \frac{\bar{\rho}_p}{\bar{\mu}_p} \frac{1}{\rho_e u_e} \frac{h^3 \Pi_m}{48 h^2} + \frac{1}{12} \left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right)_p \frac{\bar{\rho}_p}{\bar{\mu}_p} \cdot 6 \bar{\mu}_{m,1} \frac{h}{2(\bar{\rho}\bar{u})_{m,1}} = -\frac{h \Pi_m (\frac{\partial\bar{u}}{\partial y})_p \bar{\rho}_p}{48 \bar{\mu}_p \rho_e u_e} + \frac{1}{2 a_1} \left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right)_p \frac{\bar{\rho}_p}{\bar{\mu}_p} \bar{\mu}_{m,1},$$

$(\bar{\rho}\bar{u})_{m,1}$ ayant été remplacé par $\frac{a_1 h}{2} + h^2 \dots \sim \frac{a_1 h}{2}$ pour h petit.

Or, on a $a_1 = \left(\frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u})}{\partial y}\right)_p = \bar{\rho}_p \left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right)_p$ et $\Pi_m = \frac{2}{h \left(\frac{a_1}{\rho_e u_e}\right)_m} \cdot 2 \text{Max}_n \bar{\mu}_{m,n}$; on obtient alors :

$$-\frac{h \Pi_m (\frac{\partial\bar{u}}{\partial y})_p \bar{\rho}_p}{48 \bar{\mu}_p \rho_e u_e} + \frac{1}{2 a_1} \left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right)_p \frac{\bar{\rho}_p}{\bar{\mu}_p} \bar{\mu}_{m,1} = -\frac{\text{Max}_n \bar{\mu}_{m,n}}{12 \bar{\mu}_{m,p}} + \frac{1}{2} \frac{\bar{\mu}_{m,1}}{\bar{\mu}_{m,p}}$$

Puisque $\text{Max}_n \bar{\mu}_{m,n}$ se trouvera, pour des raisons physiques, près de la paroi, et puisque $\bar{\mu}_{m,1} \rightarrow \bar{\mu}_{m,p}$ pour $h \rightarrow 0$, on voit que $\frac{\text{Max}_n \bar{\mu}_{m,n}}{\bar{\mu}_{m,p}} \sim 1$ et $\frac{\bar{\mu}_{m,1}}{\bar{\mu}_{m,p}} \sim 1$, si h est suffisamment petit; d'où :

$$\left| -\frac{\text{Max}_n \bar{\mu}_{m,n}}{12 \bar{\mu}_{m,p}} + \frac{1}{2} \frac{\bar{\mu}_{m,1}}{\bar{\mu}_{m,p}} \right| < 1.$$

Pour h suffisamment petit on obtient, vu que les autres coefficients de $j_{1m+1,1}^{N-1} - j_{1m+1,1}^{N-2}$ se comportent comme h^3 ou au moins comme h , que le coefficient d'itération est plus petit que 1. L'itération est donc convergente.

Nous avons, enfin, établi un procédé légitime et convergent pour calculer, en même temps, $j_1^*(\xi, y)$ et $f_3(\xi)$ avec l'exactitude voulu, d'où l'on tire immédiatement

$$j_1(\xi, y) = j_1^*(\xi, y) + f_3(\xi) y^3.$$

La connaissance de $j = j_r + (1 - \mathcal{L})j_1$ ainsi obtenue nous permet de former, dans l'équation du mouvement, des approximations améliorées de μ et ρ et de calculer, par une nouvelle résolution de cette équation, une approximation supérieure $\bar{u}$ de u et de suite.

17. La démonstration de la convergence du procédé de détermination de j_1 est, malgré son importance théorique, trop lourde pour être appliquée au calcul numérique.

On voit d'ailleurs sur la démonstration de la convergence même, que j_1 peut être obtenu immédiatement par le procédé à différences finies, et sans itération, si l'on réussit à déterminer $j_{1m+1,0}$ directement, à la puissance h^4 près.

On a :

$$j_1 = f_0 + f_2 y^2 + f_3 y^3 + \dots$$

De l'équation de l'énergie pour $y = 0$, on tire $\left(\frac{\partial^2 j_1}{\partial y^2}\right)_p = \left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right)_p^2$; f^2 est donc connue :

$$f_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right)_p^2$$

Nous introduisons un réseau qui a comme ligne de base $y = 0$, comme hauteur des mailles h , comme longueur k_m . On trouve :

$$j_{1m+1,1} = j_{1m+1,0} + \left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right)_{m+1,0}^2 \cdot \frac{h^2}{2} + f_{3m+1} h^3 + \dots$$

et

$$\frac{\bar{\rho}_{m+1,o}}{(\rho_e u_e)_{m+1}} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_{m+1,o} \cdot \frac{j_{1m+1,o} - j_{1m,o}}{k_m} + 3 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_{m+1,o} \left(\frac{\partial p_e}{\partial \xi} \right)_{m+1} \frac{1}{(\rho_e u_e)_{m+1}} = \bar{\mu}_{m+1,o} \cdot 6 f_{3m+1}$$

cette dernière relation provenant de l'équation en j_1 , page 52, dérivée à la paroi par rapport à y .

Ce sont deux équations linéaires en $j_{1m+1,o}$ et f_{3m+1} qui permettent de calculer $j_{1m+1,o}$:

$$j_{1m+1,o} \left[1 + \frac{h^3}{6 k_m} \frac{\bar{\rho}_{m+1,o}}{\bar{\mu}_{m+1,o}} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_{m+1,o} \frac{1}{(\rho_e u_e)_{m+1}} \right] = j_{1m+1,1} - \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_{m+1,o}^2 + \frac{h^3}{6 (\rho_e u_e)_{m+1}} \left[\frac{\bar{\rho}_{m+1,o}}{k_m \bar{\mu}_{m+1,o}} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_{m+1,o} j_{1m,o} - \frac{3}{\bar{\mu}_{m+1,o}} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_{m+1,o} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_{m+1} \right] + h_4 \dots$$

On calcule $j_{1m+1,1}$ qui figure dans le deuxième membre de cette expression, également à h^4 près, par la relation de la page 54 appliquée à $n \geq 1$

$$j_{1m+1,n} = \frac{\bar{\mu}_{mn+\frac{1}{2}}}{\Pi_m \left(\frac{\bar{\rho} \bar{u}}{\rho_e u_e} \right)_{m,n}} j_{1m,n+1} + \left(1 - \frac{\bar{\mu}_{mn-\frac{1}{2}} + \bar{\mu}_{mn-\frac{1}{2}}}{\Pi_m \left(\frac{\bar{\rho} \bar{u}}{\rho_e u_e} \right)_{m,n}} \right) j_{1m,n} + \frac{\bar{\mu}_{mn-\frac{1}{2}}}{\Pi_m \left(\frac{\bar{\rho} \bar{u}}{\rho_e u_e} \right)_{m,n}} j_{1m,n-1} + \frac{k_m}{\left(\frac{\bar{\rho} \bar{u}}{\rho_e u_e} \right)_{m,n}} \cdot g_{m,n}$$

C'est sous cette forme simplifiée, dont la légitimité découle de la démonstration in extenso ci-devant, que les calculs numériques ont été conduits. Leurs résultats se trouvent dans les figures 3 à 12.

Des détails sur le calcul numérique (introduction de grandeurs sans dimension, feuilles de calcul, etc...) se trouvent réunis dans une annexe.

18. La méthode que nous venons d'exposer est "exacte" dans le sens du mot que lui a donné SCHLICHTING : elle permet le calcul de la couche limite dans tous ses détails (profils de la vitesse et de la température, valeurs de $(\partial u)/(\partial y)$ et de j_1 à la paroi) et avec toute précision que l'on veut. Les équations de la couche limite sont satisfaites par la solution en chaque point de l'écoulement et non pas seulement en moyenne, comme c'est le cas par exemple pour la méthode de GRUSCHWITZ.

De plus, la méthode permet d'évaluer, à l'aide des formules pages 51 et 58, l'erreur commise au cours des calculs. Cette évaluation nécessite, cependant, la connaissance des grandeurs à calculer et de leurs dérivées, et ne peut donc être effectuée qu'après coup.

Dans l'exemple numérique, qui a été calculé à l'Office National d'Etudes et de Recherches Aéronautiques, on s'est contenté d'une précision de l'ordre de 5 à 10 %.

19. La méthode présente, cependant, trois défauts :

1°- Elle nécessite une connaissance préalable de deux profils de vitesse (ou d'un profil de vitesse avec sa dérivée par rapport à ξ ou à x) et d'un profil de températures.

Cette connaissance ne peut être obtenue qu'au prix de simplifications (représentation approchée de l'écoulement, ou par un écoulement incompressible, ou par celui de la plaque plane), dont l'importance reste à analyser. Cette analyse sera faite à l'aide de la méthode hodographique, que nous exposerons dans le paragraphe 3 de ce chapitre.

2°- Dans sa forme actuelle, la méthode ne s'applique qu'aux deux cas (les plus importants, cependant) suivants :

- Paroi de l'obstacle imperméable à la chaleur.
- Paroi tenue à une température constante donnée.

Il paraît relativement facile d'étendre la méthode au cas d'une température de paroi donnée quelconque, en calculant d'abord le cas $\mathcal{P} = 1$ pour une température de paroi constante, identique à celle du profil de départ et en déterminant j_1 à l'aide d'une température de paroi qui tiennent compte de l'écart entre la température donnée et la température constante.

Plus difficile paraît l'adaptation de la méthode au cas d'un gradient de température variable à la paroi, l'hypothèse $\left(\frac{\partial j}{\partial y}\right)_p = 0$ ayant été utilisée d'une façon essentielle pour la démonstration de la convergence du procédé.

3°- Pour assurer une précision suffisante dans la détermination des résultats, la grandeur des mailles, h et k , doit être choisie assez petite. C'est ainsi que pour arriver à une précision finale de l'ordre de 5% (considérée comme excellente dans la théorie de la couche limite, en vue des applications pratiques), il a fallu adopter une valeur de h nécessitant environ 60 pas jusqu'au point de décollement laminaire. Le calcul complet (profil des vitesses et profil des températures) exige, sur machines à calculer du type courant, environ 16 heures (= 2 jours) de travail. Il faut donc compter, pour un exemple complet tel que nous le présentons dans les figures 3 à 12 et dans l'annexe, environ 3 mois de calcul.

La méthode est, par conséquent, beaucoup trop lourde pour être d'un emploi courant. Sa valeur théorique et pratique consiste dans ce qu'elle permet le calcul d'un prototype avec une exactitude supérieure à celle d'autres méthodes et, surtout, avec une erreur connue, dont l'évaluation mathématique est facile. On a ainsi la possibilité de "tester" les autres méthodes, ainsi qu'on l'a fait pour la méthode GRUSCHWITZ exposée dans le paragraphe précédent, et qu'on le fera pour la méthode hodographique du paragraphe suivant.

3. TRANSFORMATIONS HODOGRAPHIQUES.

1. Les méthodes globales que nous avons exposées dans le procédé de GRUSCHWITZ, au paragraphe 1 de ce chapitre, sont excellentes pour donner rapidement un résultat, dont la précision, pourtant faible, suffit dans beaucoup de cas pratiques, surtout quand il ne s'agit que de déterminer des valeurs de départ pour un calcul de la couche limite turbulente ou de la couche limite tridimensionnelle (laminaire ou turbulente).

Elles sont trop inexactes quand il s'agit de déterminer le point de décollement laminaire, la tension tangentielle à la paroi et la distribution des températures ou des vitesses à l'intérieur de la couche limite.

De plus, elles ne sont applicables qu'au cas $\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_p = 0$.

Les méthodes pas-à-pas, dont nous avons exposé une adaptation (la première croyons-nous) au cas compressible, donnent une précision bien supérieure (souvent même surabondante) dans la détermination des détails; de plus, elles s'appliquent aussi bien au cas $\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_p = 0$ qu'au cas de $T_p = T(x)$ donné. Cependant, ces méthodes sont (déjà en incompressible) trop lourdes pour pouvoir être couramment appliquées.

2. Il s'agit donc de trouver une méthode qui, sans être trop lourde pour l'application pratique, permette une précision supérieure à celle des méthodes globales.

Une telle méthode a été conçue par L. CROCCO en 1939 [1].

Plus tard, elle a été utilisée par HANTZSCHE et WENDT [10], puis par CROCCO lui-même [11], pour le calcul, en régime compressible, de la plaque plane.

Nous renvoyons aux travaux originaux cités pour en donner ici une forme plus moderne et plus adaptée au calcul numérique, publiée par F. BOUNIOL et E.A. EICHELBRENNER en 1952 [12]. Cette méthode développe une idée de E. BRUN et M. VASSEUR, exposée au 7^e Congrès International de Mécanique Appliquée.

α) Cas de la plaque plane.

On a $(dp)/(dx) = 0$; en effet, pour une plaque plane semi-infinie parallèle à l'axe des x , attaquée par un écoulement uniforme de vitesse constante U_0 , la vitesse de l'écoulement extérieur le long de la plaque est constante et égale à U_0 .

La loi de BERNOULLI donne $\frac{dp}{dx} = 0$.

Les équations de la couche limite sont alors :

$$\begin{aligned}\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \rho \left(u \frac{\partial i}{\partial x} + v \frac{\partial i}{\partial y} \right) &= \frac{1}{\mathfrak{P}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial i}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

avec
$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{i_0}{i} = \frac{T_0}{T} = \theta^{-1}$$

et
$$\mu = \mu_0 \frac{i_0 + c_p C}{i + c_p C} \left(\frac{i}{i_0} \right)^{\frac{3}{2}} = \theta^{\frac{3}{2}} \frac{1 + \theta_c}{\theta + \theta_c} \quad \text{où } \theta_c = \frac{c_p C}{i_0} = \frac{C}{T_0}.$$

Le principe d'affinité que nous avons exposé dans le chapitre II, paragraphe 1, pour le cas d'écoulements incompressibles, a été appliqué par BUSEMANN également au cas compressible; d'après une idée de PRANDTL, confirmée par les expériences, il a introduit ce principe aussi pour les températures. On pose, avec $\zeta = y/\delta$ comme seule variable indépendante,

$$u = u(\zeta) \quad \text{et} \quad i = i(\zeta).$$

Cette représentation a conduit, indépendamment, CROCCO et HANTZSCHE & WENDT à considérer i comme fonction de u , après introduction de grandeurs sans dimension, pour lesquelles on choisit :

$$\eta = \frac{u}{U_0} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{T}{T_0} = \frac{i}{i_0};$$

on a $\eta = \eta(\zeta)$ et $\theta = \theta(\zeta)$. Ces deux relations permettent d'introduire

$$\theta = \theta(\eta)$$

représentation hodographique de θ .

Les conditions aux limites sont :

à la paroi : $\theta(\theta) = \theta_p$ ou $\dot{\theta}(\theta) = \dot{\theta}_p$ (point = différenciation par rapport à η)

à la frontière de la couche limite : $\theta(1) = 1$.

La relation entre θ et η , provenant de l'élimination de ζ entre ces deux variables, a été établie par HANTZSCHE & WENDT, à l'aide d'une fonction auxiliaire

$$g(\eta) = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0 U_0}} \cdot \frac{\theta}{\theta_p} \frac{d\eta}{d\zeta};$$

k est une constante définie par $\delta = k\sqrt{x}$. La fonction g obéit à l'équation différentielle $g\ddot{g} = -\eta$ avec les conditions aux limites :

$g(1) = 0$ (tension tangentielle, dont g est une forme non-dimensionnelle, cf. HANTZSCHE & WENDT [10], nulle à la frontière de la couche limite),

$\dot{g}(0) = 0$ (suite de $u_p = v_p = 0$, cf. [10], page 518).

Dans l'hypothèse d'affinité et moyennant l'introduction de la fonction g , l'équation de continuité se trouve automatiquement satisfaite; le système de départ se réduit alors à deux équations pour les inconnues θ et g avec η comme seule variable indépendante :

$$\ddot{\theta} + (1 - \mathfrak{P}) \frac{\dot{g}}{g} \dot{\theta} + (1 - \gamma) M^2 \mathfrak{P} = \frac{1 - \mathfrak{P}}{2} \frac{\dot{\theta}^2}{\theta} \frac{\theta - \theta_c}{\theta + \theta_c} \quad g\ddot{g} = -\eta$$

les dérivées indiquées par des points étant prises par rapport à η .

Pour l'établissement de ce système à partir des équations de départ, on se reportera à la publication de l'auteur et de F. BOUNIOL [12].

Le nouveau système a l'avantage de se décomposer immédiatement.

En effet, l'équation en g ne dépend pas de θ ; même ses conditions aux limites, $g(1) = 0$ et $\dot{g}(0) = 0$ sont autonomes. L'équation est, d'ailleurs, connue comme transformée de celle de BLASIUS. Sa solution est contenue dans le tableau I; $g(\eta)$ revêt alors le caractère d'une fonction auxiliaire connue.

Reste donc l'équation en θ .

F. BOUNIOL a représenté la solution de cette équation sous la forme

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \dots$$

où θ_1 est défini comme solution de l'équation

$$\ddot{\theta}_1 + (1 - \mathfrak{P}) \frac{\dot{g}}{g} \dot{\theta}_1 + (\gamma - 1) M^2 \mathfrak{P} = 0$$

avec les mêmes conditions aux limites que l'équation exacte.

$\theta_2, \theta_3, \theta_4, \dots$ sont des corrections successives qui doivent satisfaire aux équations respectives :

$$\ddot{\theta}_2 + (1 - \mathfrak{P}) \frac{\dot{g}}{g} \dot{\theta}_2 = \frac{1 - \mathfrak{P}}{2} \frac{\dot{\theta}_1^2}{\theta_1} \frac{\theta_1 - \theta_c}{\theta_1 + \theta_c}$$

$$\ddot{\theta}_3 + (1 - \mathfrak{P}) \frac{\dot{g}}{g} \dot{\theta}_3 = \frac{1 - \mathfrak{P}}{2} \cdot \left[\frac{(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2}{\theta_1 + \theta_2} \cdot \frac{\theta_1 + \theta_2 - \theta_c}{\theta_1 + \theta_2 + \theta_c} - \frac{\dot{\theta}_1^2}{\theta_1} \cdot \frac{\theta_1 - \theta_c}{\theta_1 + \theta_c} \right]$$

$$\ddot{\theta}_4 + (1 - \mathfrak{P}) \frac{\dot{g}}{g} \dot{\theta}_4 = \frac{1 - \mathfrak{P}}{2} \cdot \left[\frac{(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2}{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} \cdot \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \theta_c}{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_c} - \frac{(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2}{\theta_1 + \theta_2} \cdot \frac{\theta_1 + \theta_2 - \theta_c}{\theta_1 + \theta_2 + \theta_c} \right]$$

les conditions aux limites s'écrivant, suivant le cas considéré :

$$\dot{\theta}_i(0) = 0, \quad \theta_i(1) = 0 \text{ (cas (a)) ou } \dot{\theta}_i(0) = 0, \quad \theta_i(1) = 0 \text{ (cas (b)) pour } i = 2, 3, 4, \dots$$

Dans l'équation de base, nous considérons $\dot{\theta}_1$ comme l'inconnue au lieu de θ_1 . La solution est alors immédiate :

$$\dot{\theta}_1(\eta) = \left(\frac{g(0)}{g(\eta)} \right)^{1-\mathcal{P}} \cdot \left\{ \dot{\theta}_p - (\gamma - 1) M^2 \mathfrak{P} \cdot \int_0^\eta \left(\frac{g(\eta)}{g(0)} \right)^{1-\mathcal{P}} d\eta \right\}$$

Dans le cas (a) des conditions aux limites, $\dot{\theta}_p$ est connu, donc $\dot{\theta}_1(\eta)$ aussi. Puisque, de plus, $\theta_1(1) = \theta(1) = 1$, on a :

$$\theta_1(\eta) = 1 - \int_\eta^1 \dot{\theta}_1(\eta) d\eta$$

où l'intégrale figurant dans le deuxième membre se calcule numériquement.

Dans le cas (b) des conditions aux limites, on subdivise l'intervalle $0 \leq \eta \leq 1$ en n intervalles partielles choisis de façon que l'on puisse écrire avec une bonne approximation

$$1 = \theta_1(1) = \theta_p + \dot{\theta}_1 \left(\frac{\eta_1}{2} \right) \cdot \eta_1 + \dot{\theta}_1 \left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{2} \right) \cdot (\eta_2 - \eta_1) + \dots + \dot{\theta}_1 \left(\frac{\eta_{n-1} + 1}{2} \right) \cdot (1 - \eta_{n-1})$$

Nous introduisons la solution $\dot{\theta}_1(\eta)$ dans cette formule qui donne, après résolution par rapport à $\dot{\theta}_p$, la valeur

$$\dot{\theta}_p = \frac{1 - \theta_p + (\gamma - 1) M^2 \mathfrak{P} \cdot \left[\frac{\eta_1 \int_0^{\frac{\eta_1}{2}} (g(\eta))^{1-\mathcal{P}} d\eta}{\left(g\left(\frac{\eta_1}{2}\right) \right)^{1-\mathcal{P}}} + \dots + \frac{(1 - \eta_{n-1}) \int_0^{\frac{\eta_{n-1} + 1}{2}} (g(\eta))^{1-\mathcal{P}} d\eta}{\left(g\left(\frac{\eta_{n-1} + 1}{2}\right) \right)^{1-\mathcal{P}}} \right]}{(g(0))^{1-\mathcal{P}} \cdot \left[\frac{\eta_1}{\left(g\left(\frac{\eta_1}{2}\right) \right)^{1-\mathcal{P}}} + \dots + \frac{1 - \eta_{n-1}}{\left(g\left(\frac{\eta_{n-1} + 1}{2}\right) \right)^{1-\mathcal{P}}} \right]}$$

Cette valeur de $\dot{\theta}_p$ portée dans l'équation p. 66, dernière ligne, donne $\dot{\theta}_1(\eta)$

Et enfin on a :

$$\theta_1(\eta) = \theta_p + \int_0^\eta \dot{\theta}_1(\eta) d\eta,$$

expression dans laquelle, à nouveau, l'intégrale se détermine numériquement.

La solution de base ainsi calculée, nous posons :

$$-\frac{1-\mathfrak{P}}{2} \cdot \frac{\dot{\theta}_1^2}{\theta_1} \cdot \frac{\theta_1 - \theta_c}{\theta_1 + \theta_c} = f_2(\eta).$$

En effet, $f_2(\eta)$ est, après la détermination de θ_1 ci-dessus, une fonction connue. On a alors à résoudre l'équation :

$$\ddot{\theta}_2 + (1-\mathfrak{P}) \frac{\dot{\theta}_2}{\theta_2} + f_2 = 0$$

Considérée d'abord comme équation en $\dot{\theta}_2$, elle admet à nouveau la solution immédiate :

$$\dot{\theta}_2(\eta) = \left(\frac{g(0)}{g(\eta)} \right)^{1-\mathfrak{P}} \left\{ (\dot{\theta}_2)_p - \int_0^\eta f_2(\eta) \left(\frac{g(\eta)}{g(0)} \right)^{1-\mathfrak{P}} d\eta \right\}$$

Dans le cas (a), $(\dot{\theta}_2)_p = 0$; $\dot{\theta}_2(\eta)$ est donc déjà connu.

Puisque, de plus, $\theta_2(1) = 0$, on a $\theta_2(\eta) = - \int_\eta^1 \dot{\theta}_2(\eta) d\eta$

Dans le cas (b), on obtient, compte tenu de $(\theta_2)_p = \theta_2(1) = 0$:

$$(\dot{\theta}_2)_p = \frac{\frac{\eta_1}{2} \int_0^{\frac{\eta_1}{2}} f_2(\eta) (g(\eta))^{1-\mathfrak{P}} d\eta + \dots + \frac{\frac{\eta_{n-1}+1}{2} \int_0^{\frac{\eta_{n-1}+1}{2}} f_2(\eta) (g(\eta))^{1-\mathfrak{P}} d\eta}{\left(g\left(\frac{\eta_1}{2}\right) \right)^{1-\mathfrak{P}} + \dots + \left(g\left(\frac{\eta_{n-1}+1}{2}\right) \right)^{1-\mathfrak{P}}} \cdot \frac{1}{\left(g(0) \right)^{1-\mathfrak{P}} \left[\frac{\eta_1}{\left(g\left(\frac{\eta_1}{2}\right) \right)^{1-\mathfrak{P}}} + \dots + \frac{1-\eta_{n-1}}{\left(g\left(\frac{\eta_{n-1}+1}{2}\right) \right)^{1-\mathfrak{P}}} \right]}.$$

Cette valeur de $(\dot{\theta}_2)_p$ sera portée dans l'équation pour $\dot{\theta}_2(\eta)$, dont la solution est alors complètement déterminée.

Finalement, on a

$$\theta_2(\eta) = \int_0^\eta \dot{\theta}_2(\eta) d\eta$$

Les corrections suivantes, $\theta_3, \theta_4, \dots$ se calculent de façon absolument analogue; en effet,

$$f_3(\eta) = \frac{1-\mathfrak{P}}{2} \cdot \left[\frac{(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2}{\theta_1 + \theta_2} \cdot \frac{\theta_1 + \theta_2 - \theta_c}{\theta_1 + \theta_2 + \theta_c} - \frac{\dot{\theta}_1^2}{\theta_1} \cdot \frac{\theta_1 - \theta_c}{\theta_1 + \theta_c} \right]$$

$$f_4(\eta) = \frac{1-\mathfrak{P}}{2} \cdot \left[\frac{(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2}{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} \cdot \frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \theta_c}{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_c} - \frac{(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2}{\theta_1 + \theta_2} \cdot \frac{\theta_1 + \theta_2 - \theta_c}{\theta_1 + \theta_2 + \theta_c} \right]$$

etc., sont à tour de rôle des fonctions connues.

La convergence du procédé est, d'ailleurs, rapide. En effet, dans les très nombreux calculs numériques effectués à l'O.N.E.R.A., une seule fois seulement le calcul de θ_3 a été nécessaire.

Les valeurs de θ_4 ont été, dans tous les cas, au-dessous de l'erreur admise.

La méthode de résolution ci-dessus, proposée par l'auteur, a, -vis-à-vis des méthodes appliquées jusqu'ici, cf. par exemple CROCCO [11], dont les calculs ont nécessité une machine

à haute capacité— l'avantage de permettre, pour la première fois, le calcul de θ sans tâtonnements, même dans le cas (b) des conditions aux limites. Vis-à-vis de la méthode de HANTZSCHE & WENDT, on remarquera qu'aucune hypothèse simplificatrice n'a été faite au sujet de μ et $\mathfrak{P}$. En effet, les résultats numériques que nous publions, avec l'autorisation de l'O.N.E.R.A., pour la première fois,* ont été obtenus pour un nombre de PRANDTL $\mathfrak{P} = 0,725$. Le calcul complet d'une courbe $\theta(\eta)$ a demandé à l'auteur, muni d'une machine à calculer ordinaire, 2 heures seulement. La coïncidence avec les résultats de CROCCO qu'il nous avait communiqués, est parfaite.

A l'aide de g et θ , déterminés ainsi comme fonctions de η , on calculera le profil des vitesses par l'intermédiaire de l'équation de définition de $g(\eta)$, page 65, que l'on peut écrire sous la forme immédiatement intégrable

$$d\left(k\sqrt{\frac{\rho_0 U_0}{\mu_0}} \cdot \zeta\right) = \frac{\theta}{\theta_p} \frac{d\eta}{g}$$

L'intégration donne $\zeta^* = k\sqrt{\frac{\rho_0 U_0}{\mu_0}} \zeta = \sqrt{\frac{\rho_0 U_0}{\mu_0}} \frac{\gamma}{x^2}$ en fonction de η ; la connaissance de $\zeta^*(\eta)$

suffit pour la plupart des applications numériques.

Cependant, cette dernière intégration manque de précision. Nous nous trouvons en face de la difficulté commune à tous les procédés hodographiques : le retour aux coordonnées physiques. En effet, $g(\eta) \rightarrow 0$ pour $\eta \rightarrow 1$, de façon que $\gamma \rightarrow \infty$ pour $\eta \rightarrow 1$. Ceci est bien en accord avec le fait que la couche limite rejoint asymptotiquement l'écoulement extérieur, mais conduit à une détermination assez peu précise de l'épaisseur δ de la couche limite.

Par contre, les valeurs à la paroi ainsi que les épaisseurs intégrales (épaisseur de déplacement, de perte de quantité de mouvement, d'augmentation d'enthalpie) sont assez bien déterminées.

β) Pression extérieure variable :

3. L. CROCCO a soumis, [1], le système des équations de la couche limite avec gradient de pression,

$$\begin{aligned} \rho\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{dp}{dx} \\ \rho\left(u \frac{\partial}{\partial x}\left(i + \frac{u^2}{2}\right) + v \frac{\partial}{\partial y}\left(i + \frac{u^2}{2}\right)\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\mathfrak{P}} \frac{\partial}{\partial y}\left(i + \mathfrak{P} \frac{u^2}{2}\right)\right) \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

à la transformation suivante :

Il introduit comme nouvelles variables, à la place de x et y , le système composé de x et u . Après introduction de

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\mu}{\frac{\partial u}{\partial y}}$$

comme nouvelle inconnue et élimination de v entre l'équation de continuité et celle du mouvement, écrites avec les nouvelles grandeurs, il obtient après quelques remaniements, pour lesquels nous renvoyons au travail de CROCCO [1], le système des deux équations ci-après, beaucoup plus simples :

$$\begin{aligned} u \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho \mu}{\tau}\right) + \frac{\partial^2 \tau}{\partial u^2} - \frac{dp}{dx} \cdot \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mu}{\tau}\right) &= 0 \\ \frac{1 - \mathfrak{P}}{\mathfrak{P}} \frac{\partial i}{\partial u} \cdot \tau \cdot \frac{\partial \tau}{\partial u} + \frac{\frac{\partial^2 i}{\partial u^2} + \mathfrak{P}}{\mathfrak{P}} \cdot \tau^2 - u \rho \mu \frac{\partial i}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial i}{\partial u} + u\right) \frac{dp}{dx} &= 0 \end{aligned}$$

* voir figures 13-23.

pour les inconnues τ et i . Comme d'habitude, ρ et μ sont des fonctions de i données par

$$\rho = \frac{c_p p(x)}{r \cdot i} \quad \text{et} \quad \mu = \mu_0 \frac{i_0 + c_p \frac{C}{i}}{i + c_p \frac{C}{i_0}}^{\frac{1}{2}}.$$

C'est ce système, obtenu par une transformation semi-hodographique (x ayant été conservé comme variable, cependant que y a été remplacé par u), qui nous servira pour le départ :

On voit, en effet, qu'on peut choisir τ^2 comme variable inconnue au lieu de τ . On démontre facilement les relations suivantes

$$\tau \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho \mu}{\tau} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\rho \mu) - \frac{1}{2} \frac{\rho \mu}{\tau^2} \frac{\partial \tau^2}{\partial x}$$

$$\tau \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\mu}{\tau} \right) = \frac{\partial \mu}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\mu}{\tau^2} \frac{\partial \tau^2}{\partial u}$$

$$\tau \frac{\partial \tau}{\partial u} = \frac{1}{2} \frac{\partial \tau^2}{\partial u}$$

$$\tau \frac{\partial^2 \tau}{\partial u^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tau^2}{\partial u^2} - \frac{1}{4 \tau^2} \left(\frac{\partial \tau^2}{\partial u} \right)^2$$

qui modifient le système de départ, dont nous multiplions encore la première équation par τ^3 , de la façon suivante :

$$u \tau^2 \frac{\partial}{\partial x} (\rho \mu) - \frac{1}{2} u \rho \mu \frac{\partial \tau^2}{\partial x} + \frac{1}{2} \tau^2 \frac{\partial^2 \tau^2}{\partial u^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \tau^2}{\partial u} \right)^2 = \frac{dp}{dx} \left(\tau^2 \frac{\partial \mu}{\partial u} - \frac{1}{2} \mu \frac{\partial \tau^2}{\partial u} \right)$$

$$\frac{1 - \mathfrak{P}}{2} \cdot \frac{\partial i}{\partial u} \cdot \frac{\partial \tau^2}{\partial u} + \frac{\frac{\partial^2 i}{\partial u^2} + \mathfrak{P}}{\mathfrak{P}} \tau^2 = u \rho \mu \frac{\partial i}{\partial x} - \frac{dp}{dx} \mu \left(\frac{\partial i}{\partial u} + u \right).$$

4. Ces équations en i et τ^2 seront encore rendues non-dimensionnelles par les transformations et les substitutions suivantes :

a) VARIABLES INDÉPENDANTES.

$$x = l \xi, \quad u = \eta u_e(\xi); \quad \eta = \frac{u}{u_e(x)}.$$

La forme différentielle de cette transformation est :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{l} \frac{\eta}{u_e(\xi)} \cdot \frac{\partial u_e}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{1}{u_e(\xi)} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2}{\partial u^2} = \frac{1}{(u_e(\xi))^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}.$$

Ici et dans ce qui suit, il n'y a pas de confusion à craindre lorsque l'on désigne brièvement $u_e[x(\xi)]$ par $u_e(\xi)$, $p[x(\xi)]$ par $p(\xi)$, etc...

b) FONCTIONS (CONNUES ET INCONNUES) DES VARIABLES INDÉPENDANTES :

On pose $i = c_p T_0 \phi$ avec $\phi = \frac{T}{T_0}$

d'où $p = \frac{p(\xi)}{r T_0 \phi}$ et $\mu = \mu_0 \phi \phi^{\frac{1}{2}} \frac{1 + \phi_c}{\phi + \phi_c} \left(\text{avec } \phi_c = \frac{C}{T_0} \right)$

et, plus particulièrement,

$$\rho \mu = \mu_0 \frac{p(\xi)}{r T_0} \phi^{\frac{1}{2}} \frac{1 + \phi_c}{\phi + \phi_c}.$$

De plus, on pose

$$p(\xi) = \gamma p_0 q(\xi) \quad \text{et} \quad \tau = \frac{\mu_0 u_e(\xi)}{l}, \quad t$$

où l , comme d'habitude, est une longueur de référence, par exemple la profondeur de l'obstacle.

Les équations pour i et τ^2 deviennent alors :

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_o^3 \gamma p_o}{l^3 r T_o} \cdot (u_e(\xi))^3 \frac{dq}{d\xi} \cdot \eta \cdot t^2 \cdot \phi^{\frac{1}{2}} \frac{1 + \phi_c}{\phi + \phi_c} + \frac{\mu_o^3 \gamma p_o}{l^3 r T_o} (u_e(\xi))^3 q(\xi) \cdot \eta \cdot t^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\phi^{\frac{1}{2}} \frac{1 + \phi_c}{\phi + \phi_c} \right) \\ & - \frac{\mu_o^3 \gamma p_o}{l^3 r T_o} (u_e(\xi))^2 \frac{du_e}{d\xi} \cdot q(\xi) \cdot \eta^2 \cdot t^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\phi^{\frac{1}{2}} \frac{1 + \phi_c}{\phi + \phi_c} \right) - \frac{1}{2} \frac{\mu_o^3 \gamma p_o}{l^3 r T_o} (u_e(\xi))^3 q(\xi) \eta \frac{\partial t^2}{\partial \xi} \phi^{\frac{1}{2}} \frac{1 + \phi_c}{\phi + \phi_c} \\ & - \frac{\mu_o^3 \gamma p_o}{l^3 r T_o} (u_e(\xi))^2 \frac{du_e}{d\xi} q(\xi) \eta t^2 \phi^{\frac{1}{2}} \frac{1 + \phi_c}{\phi + \phi_c} + \frac{1}{2} \frac{\mu_o^3 \gamma p_o}{l^3 r T_o} (u_e(\xi))^2 \frac{du_e}{d\xi} q(\xi) \eta^2 \frac{\partial t^2}{\partial \xi} \phi^{\frac{1}{2}} \frac{1 + \phi_c}{\phi + \phi_c} \\ & + \frac{1}{2} \frac{\mu_o^4}{l^4} (u_e(\xi))^2 \cdot t^2 \cdot \frac{\partial^2 t^2}{\partial \eta^2} - \frac{1}{4} \frac{\mu_o^4}{l^4} (u_e(\xi))^2 \left(\frac{\partial t^2}{\partial \eta} \right)^2 = \\ & = \mu_o^3 \frac{\gamma p_o}{l^3} u_e(\xi) \cdot \frac{dq}{d\xi} t^2 \phi \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\phi^{\frac{1}{2}} \frac{1 + \phi_c}{\phi + \phi_c} \right) + \frac{\mu_o^3 \gamma p_o}{l^3} u_e(\xi) \frac{dq}{d\xi} \cdot t^2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \phi^{\frac{1}{2}} \frac{1 + \phi_c}{\phi + \phi_c} \\ & - \frac{1}{2} \frac{\mu_o^3 \gamma p_o}{l^3} \cdot u_e(\xi) \cdot \frac{dq}{d\xi} \cdot \frac{\partial t^2}{\partial \eta} \cdot \phi \cdot \phi^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1 + \phi_c}{\phi + \phi_c} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} & \frac{1 - \Phi}{2 \Phi} \cdot \frac{\mu_o^2}{l^2} c_p T_o \frac{\partial t^2}{\partial \eta} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \frac{\mu_o^2}{l^2} (u_e(\xi))^2 \cdot t^2 + \frac{1}{\Phi} \frac{\mu_o^2}{l^2} c_p T_o t^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} = \\ & = \frac{\mu_o \gamma p_o}{l r T_o} c_p T_o \cdot u_e(\xi) q(\xi) \eta \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \cdot \phi^{\frac{1}{2}} \frac{1 + \phi_c}{\phi + \phi_c} - \frac{\mu_o \gamma p_o}{l r T_o} c_p T_o \frac{du_e}{d\xi} q(\xi) \eta^2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \phi^{\frac{1}{2}} \frac{1 + \phi_c}{\phi + \phi_c} \\ & - \frac{\mu_o \gamma p_o}{l} c_p T_o \frac{1}{u_e(\xi)} \frac{dq}{d\xi} \phi \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \phi^{\frac{1}{2}} \frac{1 + \phi_c}{\phi + \phi_c} - \frac{\mu_o \gamma p_o}{l} u_e(\xi) \frac{dq}{d\xi} \eta \cdot \phi \cdot \phi^{\frac{1}{2}} \frac{1 + \phi_c}{\phi + \phi_c} . \end{aligned}$$

Dans le système ainsi transformé nous simplifions l'écriture :

Nous introduisons $w_e(\xi) = \frac{u_e(\xi)}{U_o}$ et $M_o = \frac{U_o}{a_o}$

(M_o = nombre de Mach de l'écoulement à l'infini, a_o = célérité du son).

A l'aide des équations de BERNOULLI, $\frac{1}{2}(U_o^2 - u_e^2) = \int_{p_o}^p \frac{dp}{\rho}$ et de POISSON, $\frac{p}{p_o} = \left(\frac{\rho}{\rho_o}\right)^\gamma$, on exprime $u_e(\xi)$, $q(\xi)$ et $T_e(\xi)$ par $w_e(\xi)$, ce qui donne (avec $\gamma = 1,4 = \frac{7}{5}$ pour l'air) :

$$\begin{aligned} u_e(\xi) &= a_o M_o w_e(\xi) \\ q(\xi) &= \frac{5}{7} \cdot [(1 + 0,2 M_o^2) - 0,2 M_o^2 w_e^2]^{\frac{7}{4}} \\ \frac{dq}{d\xi} &= -M_o^2 w_e \frac{dw_e}{d\xi} \cdot [(1 + 0,2 M_o^2) - 0,2 M_o^2 w_e^2]^{\frac{5}{4}} \\ \phi_e &= \frac{T_e(\xi)}{T_o} = [(1 + 0,2 M_o^2) - 0,2 M_o^2 w_e^2] \end{aligned}$$

Enfin, on pose $\frac{l p_o U_o}{\mu_o} = R_o$ (nombre de Reynolds à l'infini)

$$w_e' = \frac{dw_e}{d\xi}, \quad q' = \frac{dq}{d\xi} \text{ etc.}, \quad V(\xi, \eta) = \phi^{\frac{1}{2}} \frac{1 + \phi_c}{\phi + \phi_c}$$

et

$$W(\xi) = [(1 + 0,2 M_o^2) - 0,2 M_o^2 w_e^2] .$$

Le système devient alors, quand on divise encore la première de ces équations par

$$\gamma p_o \frac{\mu_o^3}{l^3} a_o M_o^2 w_e^2 w_e' W^{5/2} t^2 V$$

et la deuxième par

$$\frac{1 - \mathfrak{P}}{\mathfrak{P}} \frac{\mu_o^2}{l^2} c_p T_o \frac{\partial \phi}{\partial \eta}, \quad \text{après regroupement des termes :}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \left\{ \frac{\partial V}{V} - \frac{1}{2} \frac{\partial \eta}{t^2} \right\} \cdot \phi = (W + \frac{7}{5} M_o^2 w_e^2) \cdot \eta - \frac{w_e'}{w_e} \cdot W \left\{ \frac{\partial V}{V} - \frac{1}{2} \frac{\partial \xi}{t^2} \right\} \cdot \eta \\ + W \left\{ \frac{\partial V}{V} - \frac{1}{2} \frac{\partial \eta}{t^2} \right\} \cdot \eta^2 - \frac{1}{2 R_o} \frac{\partial^2 t^2}{\partial \eta^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial t^2}{\partial \eta} \right)^2 \cdot t^{-2} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \frac{\partial t^2}{\partial \eta} + \frac{2}{1 - \mathfrak{P}} \frac{1}{\frac{\partial \phi}{\partial \eta}} \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + 0,4 \mathfrak{P} M_o^2 w_e^2 \right\} \cdot t^2 = \frac{2 R_o \mathfrak{P}}{1 - \mathfrak{P}} w_e' \cdot W^{5/2} \cdot V \cdot \\ \cdot \left\{ (\phi - W \eta^2) + \eta \frac{\phi}{\frac{\partial \phi}{\partial \eta}} \left(0,4 M_o^2 w_e^2 + \frac{w_e'}{w_e} \cdot \frac{\partial \xi}{\phi} \cdot W \right) \right\} \end{aligned}$$

forme qui n'est, d'ailleurs, légitime que dans le cas où w_e' n'est pas identiquement nulle, hypothèse que nous pouvons faire étant donné que le cas de la plaque plane a déjà été résolu. Encore pouvons-nous tenir compte de ce que t ne figure qu'à la deuxième puissance et écrire $t^2 R_o = \Theta$:

On obtient la forme finale qui servira comme base à nos considérations ultérieures :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \left(\frac{\partial V}{V} - \frac{1}{2} \frac{\partial \eta}{\Theta} \right) \cdot \phi = \left(W + \frac{7}{5} M_o^2 w_e^2 \right) \eta - \frac{w_e'}{w_e} \cdot W \left(\frac{\partial V}{V} - \frac{1}{2} \frac{\partial \xi}{\Theta} \right) \cdot \eta \\ + W \left(\frac{\partial V}{V} - \frac{1}{2} \frac{\partial \eta}{\Theta} \right) \cdot \eta^2 - \frac{2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} - \Theta^{-1} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right)^2}{4 w_e' \cdot W^{5/2} \cdot V} \end{aligned}$$

et :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \eta} + \frac{2}{1 - \mathfrak{P}} \cdot \frac{1}{\frac{\partial \phi}{\partial \eta}} \cdot \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + 0,4 \mathfrak{P} M_o^2 w_e^2 \right\} \Theta = \frac{2 \mathfrak{P}}{1 - \mathfrak{P}} w_e' W^{5/2} V \left\{ (\phi + W \eta^2) + \eta \frac{\phi}{\frac{\partial \phi}{\partial \eta}} \left(0,4 M_o^2 w_e^2 + \frac{w_e'}{w_e} \cdot \frac{\partial \xi}{\phi} \cdot W \right) \right\}$$

5. Ce système se prête à une solution numérique à l'aide d'un procédé pas à pas, beaucoup plus simple que celui que nous avons exposé au paragraphe 2 de ce chapitre. Elle a été décrite dans une publication de l'auteur [13]. Cependant, le procédé reste lourd et serait inférieur, en rapidité aux méthodes globales, et en précision à la méthode du paragraphe 2 (ceci surtout en raison des difficultés du retour aux coordonnées physiques).

C'est pourquoi nous ne détaillerons pas ici cette solution qui comporte par surcroît la difficulté rencontrée dans les chapitres précédents : celle de la détermination des profils (vitesse et température) de départ.

Il faut souligner que même dans les cas incompressibles, susceptibles d'une solution exacte par l'application du principe d'affinité, la solution n'est plus valable près du bord d'attaque de l'obstacle, étant donné que les simplifications de PRANDTL ne sont plus valables, cf. chapitre I, paragraphes 1 et 3.

D'autre part, on a vu à propos des méthodes précédentes que, malgré cette incertitude sur les conditions initiales, les résultats des différentes méthodes concurrentes sont sensiblement concordants. On peut donc espérer que l'influence de ces conditions initiales sera assez faible.

Ceci doit s'exprimer, mathématiquement, par une influence négligeable des dérivées en ξ . Déjà CROCCO avait souligné [1], à propos de la deuxième de ces équations, qu'elle pouvait être facilement interprétée comme équation ordinaire, par rapport à η , pour τ^2 . Nous soumettons donc le système que nous venons d'établir, page 71, à un examen détaillé de l'influence des dérivées des inconnues Θ et ϕ par rapport à ξ .

En revenant sur la remarque de CROCCO - à laquelle il n'avait, d'ailleurs, pas donné suite - nous considérons d'abord la deuxième de nos équations de la page 71. L'inconnue Θ , en effet, n'y figure que sous la forme $(\partial\Theta)/(\partial\eta)$ et Θ . Si l'on considère, alors, ϕ comme (momentanément) connue, cette équation est une équation ordinaire de premier ordre pour Θ , dans laquelle ξ ne figure qu'en paramètre. Mais, de plus, on voit que cette deuxième inconnue, ϕ , est représentée elle-même surtout par sa dérivée en η et, une seule fois, dérivée par rapport à ξ . La dérivée par rapport à ξ se trouve seulement dans l'expression

$$0,4 M_o^2 w_e^2 + \frac{w_e}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \cdot W$$

On a :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = 2 \frac{\phi_c + \phi}{\phi_c - \phi} \frac{\partial V}{\partial \xi} = 2 \frac{\phi_c + \phi}{\phi_c - \phi} \left[\frac{\partial(\rho\mu)}{\partial \xi} + \frac{1,4 M_o w_e w'_e}{W} \right]$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} 0,4 M_o^2 w_e^2 + \frac{w_e}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \cdot W &= 0,4 M_o^2 w_e^2 + 2 \frac{\phi_c + \phi}{\phi_c - \phi} W \cdot \frac{w_e}{w'_e} \frac{\partial \xi}{\partial \mu} + 2,8 \frac{\phi_c + \phi}{\phi_c - \phi} M_o^2 w_o^2 = \\ &= 0,8 M_o^2 w_e^2 \frac{4 \phi_c + 3 \phi}{\phi_c - \phi} + 2 \frac{w_e}{w'_e} W \frac{\phi_c + \phi}{\phi_c - \phi} \frac{\partial(\rho\mu)}{\partial \xi} \end{aligned}$$

Or, $\rho\mu$ est une fonction à faible variation; nous pouvons, par conséquent, considérer $\frac{\partial(\rho\mu)}{\partial \xi} \sim 0$. C'est donc le produit $\left(\frac{\partial(\rho\mu)}{\partial \xi} / (\rho\mu) \right) \cdot \left(\frac{w_e}{w'_e} \right)$ dont la grandeur mesure l'erreur que nous allons commettre : On a d'autant plus le droit de négliger le deuxième terme de la somme vis-à-vis de son premier terme que w'_e est plus grand que zéro. Cette constatation est importante : En effet, on fera, plus tard, un choix de ϕ qui sera d'autant plus exact que l'écoulement ressemblera plus, localement, à celui d'une plaque, donc correspondra plus à $w'_e = 0$.

On a donc la conclusion suivante : En déterminant ϕ de façon que, pour $w'_e \sim 0$, cette fonction soit celle de la plaque plane, l'expression $(\partial\phi)/(\partial\xi)$: ϕ est soit une bonne approximation de sa valeur exacte, facile à déterminer par la méthode a), soit équivalente à

$$0,8 M_o^2 w_e^2 \frac{4 \phi_c + 3 \phi}{\phi_c - \phi},$$

donc à une fonction qui ne contient pas de dérivée par rapport à ξ .

L'équation en Θ a donc une forme pratiquement indépendante de l'état antérieur de la couche limite qui n'intervient, sous une forme atténuée, que par la distance déjà parcourue et, éventuellement, par l'intermédiaire de la fonction ϕ . La mesure de cette indépendance est évidemment donnée par la variation de $\rho\mu$ dans l'intervalle de ξ déjà parcouru.

Il ne s'agit, par conséquent, que de trouver une détermination de ϕ qui soit celle de la plaque plane pour $w'_e \sim 0$ et qui donne néanmoins une bonne approximation de ϕ même (mais non de $(\partial\phi)/(\partial\xi)$) dans les autres cas.

Or, nous analysons, dans cette intention, la première des deux équations de la page 71. Elle est, visiblement, de la même forme que celle en Θ que nous venons de considérer. Il est donc probable qu'elle permettra les mêmes conclusions.

Cependant, l'influence du terme

$$\frac{\frac{\partial V}{\partial \xi}}{V} - \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial \Theta}{\partial \xi}}{\Theta} \sim \gamma \frac{M_o w_e w'_e}{W} - \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial \Theta}{\partial \xi}}{\Theta}$$

qui figure dans cette équation, est moins facile à évaluer.

Pour conclure l'indépendance de ϕ des états antérieurs, nous appliquerons alors un autre raisonnement.

Nous rappelons les résultats de FALKNER & SKAN et de HARTREE que nous avons exposés, dans le cas incompressible, au paragraphe 1 du deuxième chapitre. Il s'agit des écoulements extérieurs de la forme $w_e(\xi) = b\xi^m$ dont les couches limites correspondantes satisfont, en fonction de la variable indépendante

$$\zeta = \sqrt{\frac{m+1}{2}} \sqrt{\frac{w_e}{\xi}} \sqrt{R_o} \cdot \frac{\gamma}{l},$$

à l'hypothèse d'affinité. Les profils de vitesse ont été calculés, pour plusieurs m , par HARTREE. Quelques-uns de ces profils se trouvent représentés figures 1 et 24.

L'auteur avait calculé, pour la détermination des profils initiaux de la fonction j_1 rencontrée au paragraphe précédent dans l'exposé du procédé aux différences finies, les profils correspondants d'une fonction χ_1 qui (toujours dans le cas d'un écoulement extérieur $w_e(\xi) = b\xi^m$) est liée à ϕ par la relation

$$\chi_1 = \frac{1}{1-\mathfrak{L}} \left(\frac{\eta^2}{2} - 1 \right) + \frac{c_p T_o}{1-\mathfrak{L}} \frac{\phi - W}{\alpha_o^2 M_o^2 w_e^2}.$$

La figure 25 représente ceux des profils de χ_1 qui correspondent aux profils de vitesse de HARTREE de la figure 24.

La différence, pour différentes valeurs de m , paraît grande. Si, cependant, on représente χ_1 en fonction de $\eta = u/u_e$ au lieu de ζ , pratiquement on retombe, dans tous les cas, sur la même courbe (voir figure 26).

ϕ ne dépend donc pratiquement que de ξ , w_e et des valeurs T_o et M_o à l'infini; en particulier, ϕ ne dépend pas de w'_e . Compte tenu du fait que, pour ξ donné, toute fonction w_e peut être localement approchée par une fonction de la forme $b\xi^m$, l'affirmation paraît être suffisamment générale pour être étendue à n'importe quelle fonction w_e .

On peut donc affirmer qu'à un endroit ξ donné, le profil des ϕ en fonction de η est déterminé, avec une bonne précision, par la connaissance de $w_e(\xi)$ et de l'état du fluide à l'infini.

6. Cette propriété de ϕ d'une part, et la discussion de l'équation en Θ d'autre part, laissent prévoir qu'on peut obtenir une bonne approximation des grandeurs caractéristiques de la couche limite par le procédé suivant :

À l'endroit ξ voulu on détermine ϕ comme fonction de η , en écrivant, d'après les définitions de la page 70 :

$$\phi(\eta) = \frac{T}{T_o} = \frac{T}{T_e} \cdot \frac{T_e}{T_o} = \theta(\eta) \cdot W(\xi).$$

Ici, $W(\xi)$ est donnée; $\theta(\eta)$ sera calculée par la méthode du cas α) (procédé de F. BOUNIOL et de E.A. EICHELBRENNER) pour une plaque plane ayant les mêmes conditions aux limites à l'extérieur et à la paroi que l'écoulement en question.

À l'aide de cette fonction $\phi(\eta)$, on forme les coefficients de l'équation en Θ , en remplaçant

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} / \phi \text{ par } 2 \frac{\phi_c + \phi}{\phi_c - \phi} \gamma \frac{M_o w_e w'_e}{W}.$$

Cette détermination des coefficients de l'équation en Θ permet de l'intégrer en tant qu'équation différentielle ordinaire par rapport à η .

On obtient alors :

$$\Theta = \exp \left[- \int_0^\eta \frac{2}{1-\mathfrak{P}} \cdot \frac{1}{\frac{\partial \phi}{\partial \eta}} \cdot \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + \frac{2}{5} \mathfrak{P} M_o^2 w_e^2 \right) d\eta \right] \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \\ \cdot \left\{ H(\xi) + \int_0^\eta \frac{2}{1-\mathfrak{P}} w_e' W^{\frac{5}{2}} V \left[(\phi - \eta^2 W) + 2 \eta \frac{\phi}{\frac{\partial \phi}{\partial \eta}} \left(0, 2 M_o^2 w_e^2 + \frac{1}{2} \frac{w_e}{\phi} \frac{\partial \xi}{\partial \eta} W \right) \right] \right. \\ \left. \cdot \exp \left[\int_0^\eta \frac{2}{1-\mathfrak{P}} \frac{1}{\frac{\partial \phi}{\partial \eta}} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + \frac{2}{5} \mathfrak{P} M_o^2 w_e^2 \right) d\eta \right] d\eta \right\}$$

equation dans laquelle $H(\xi)$ reste à déterminer.

Or, pour Θ on dispose de deux conditions aux limites :

1) L'équation du mouvement donne à la paroi

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial u_p} \right) = \frac{dp}{dx} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial u_p} \right)$$

ce qui devient, en grandeurs non-dimensionnelles

$$\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right)_p = - 2 V_p \phi_p w_e' W^{\frac{5}{2}}.$$

2) $\Theta = 0$ pour $\eta = 1$ (on sait que $\tau = 0$ à la frontière de la couche limite; Θ est une forme sans dimension de τ^2).

7. Cependant, pour déterminer $H(\xi)$, on n'a besoin que d'une seule condition. En effet, on peut démontrer que la deuxième des conditions ci-dessus est automatiquement satisfaite :

Nous avons posé $\phi = \theta \cdot W$, θ étant la solution de la plaque.

On a alors

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} = \frac{\partial \theta}{\partial \eta} W \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} W,$$

d'où

$$\frac{\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + \frac{2}{5} \mathfrak{P} M_o^2 w_e^2}{\frac{\partial \phi}{\partial \eta}} = \frac{\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} W + \frac{2}{5} \mathfrak{P} M_o^2 w_e^2}{\frac{\partial \theta}{\partial \eta} W} = \frac{\ddot{\theta}(\eta)}{\dot{\theta}(\eta)} + \frac{2}{5} \frac{\mathfrak{P} M_o^2 w_e^2}{W} (\dot{\theta}(\eta))^{-1}$$

Le fait que $g(I) = 0$, $\dot{g}(I) < 0$ permet deux conclusions :

D'abord, l'équation de la page 66 pour $\dot{\theta}_1$ ainsi que les équations analogues pour $\dot{\theta}_2$, $\dot{\theta}_3$ etc. montrent que $\dot{\theta}(\eta) \sim g(\eta)^{-(1-\mathfrak{P})}$ pour $\eta \rightarrow 1$, d'où l'on voit que $\dot{g}/g$ est d'un ordre supérieur à celui de $\dot{\theta}$. De l'équation pour $\theta(\eta)$ dans le cas α),

$$\frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}} + (1-\mathfrak{P}) \frac{\dot{g}}{g} + \frac{(\gamma-1) M_o^2 \mathfrak{P}}{\dot{\theta}} = \frac{1-\mathfrak{P}}{2} \frac{\dot{\theta}}{\theta} \frac{\theta - \theta_c}{\theta + \theta_c}$$

on tire alors, compte tenu du signe de $\dot{g}$, que $\ddot{\theta}/\dot{\theta} \rightarrow \infty$ pour $\eta \rightarrow 1$. De là, on voit immédiatement que, pour $\eta \rightarrow 1$, également

$$\frac{\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + \frac{2}{5} \mathfrak{P} M_o^2 w_e^2}{\frac{\partial \phi}{\partial \eta}} \rightarrow \infty$$

De plus, on a $\phi \rightarrow W$ et $\frac{\phi}{\frac{\partial \phi}{\partial \eta}} \rightarrow 0$, et —par conséquent—

$$\left\{ (\phi - \eta^2 W) + 2 \eta \frac{\phi}{\frac{\partial \phi}{\partial \eta}} \left(0, 2 M_o^2 w_e^2 + \frac{1}{2} \frac{w_e}{w_e'} \frac{\partial \xi}{\partial \phi} W \right) \right\} \rightarrow 0 \text{ pour } \eta \rightarrow 1$$

La solution Θ , page 74, est donc, pour $\eta = 1$, toujours nulle et ne donne, par conséquent, pas de condition pour $H(\xi)$.

Reste donc la première condition, $\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right)_p = -2 V_p \phi_p w_e' W^{\frac{1}{2}}$, ce qui permet la détermination de $H(\xi)$, sauf —malheureusement— dans le cas important où la condition aux limites à la paroi est $\left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_p = 0$.

On constate, en effet, aisément que l'équation en Θ , page 74, n'est intégrable que pour

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + \frac{2}{5} \mathfrak{P} M_o^2 w_e^2 \right)_p = 0.$$

$$\left(\frac{\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + \frac{2}{5} \mathfrak{P} M_o^2 w_e^2}{\frac{\partial \phi}{\partial \eta}} \right)_p$$

est donc une expression indéterminée qui se comporte, pour $\eta = 0$, comme

$$\left[\frac{\partial^3 \phi}{\partial \eta^3} : \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} \right]_p$$

Or, de la condition d'intégrabilité même, il résulte que

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} \right)_p = -\frac{2}{5} \mathfrak{P} M_o^2 w_e^2 \neq 0,$$

cependant que l'on voit immédiatement par la différentiation de l'équation en $\theta(\eta)$ dans le cas α), que $\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial \eta^3} \right)_p = 0$. Mais la solution que nous avons donnée, page 74, pour Θ , ne contient, après différentiation par rapport à η , $H(\xi)$ que par son produit par

$$\left(\frac{\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + \frac{2}{5} \mathfrak{P} M_o^2 w_e^2}{\frac{\partial \phi}{\partial \eta}} \right)_p = 0.$$

Dans ce cas, nous tournons la difficulté de la façon suivante :

On pose :

$$\sqrt{x} \cdot \tau = G(u) = \sqrt{\frac{\rho_p \mu_p u_c^3}{2}} g(\eta)$$

d'où

$$\frac{d^2}{du^2} G(u) = \sqrt{\frac{\rho_p \mu_p}{2 u_e}} \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2}$$

et

$$G(u) \frac{d^2}{du^2} G(u) = \frac{\rho_p \mu_p}{2} u_e g \ddot{g} = -\frac{\rho \mu u}{2} = -\frac{\rho \mu}{2} u_e \eta$$

Remarque : La partie soulignée de cette relation a été établie par HANTZSCHE & WENDT (voir [10] équation 6) pour la plaque plane; elle sera appliquée ici au cas général, en vertu des considérations qui nous ont déjà guidé pour la détermination de ϕ . On obtient alors :

$$g \ddot{g} = -\frac{\rho \mu}{\rho_p \mu_p} \cdot \eta = -\eta \frac{V}{V_p},$$

équation en g dont on s'efforce de trouver la solution avec les conditions aux limites $g(1) = 0$

et

$$(g \dot{g})_p = -2\xi \frac{w'_e}{w_e} \frac{\phi_p}{W},$$

cette dernière condition étant tirée de la condition exacte

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial u}\right)_p = \frac{dp}{dx} \cdot \left(\frac{\partial \gamma}{\partial u}\right)_p$$

ou bien

$$\tau_p \left(\frac{\partial \tau}{\partial u}\right)_p = \mu_p p'.$$

Une telle solution n'existe pas nécessairement, l'équation en g et l'une des conditions, $g(l) = 1$, étant valables, en principe, pour $w'_e = 0$, cependant que dans la condition

$$(g \dot{g})_p = -2\xi \frac{w'_e}{w_e} \frac{\theta_p}{W},$$

on aura en général $w'_e \neq 0$.

De l'étude de l'équation analogue de BLASIUS, $g \ddot{g} = -\eta$, on sait que $g(l) = 0$ et $g_p > 0$ ne sont simultanément possibles que pour

$$-2\xi \frac{w'_e}{w_e} \frac{\theta_p}{W} \leq 0,$$

c'est-à-dire avant le minimum de pression. Après ce minimum de pression, $g(l)$ est, pour $g_p > 0$, toujours positif en fonction de $g(0)$, mais possède un minimum très prononcé, dernière trace du zéro que $g(l)$ présente en fonction de $g(0)$ avant le minimum de pression.

On déterminera alors $g(0)$ de façon que

soit (avant le minimum de pression) $g(l) = 0$

soit (après le minimum de pression) $\frac{d(g(l))}{d(g(0))} = 0$.

A partir des définitions de Θ , τ et g on obtient

$$\Theta_p = \frac{w_e}{2\xi} \cdot V_p \cdot W^{7/2} (g(0))^2$$

$g(0)$ étant déterminé comme on vient de le voir.

Cette valeur introduite dans l'équation de Θ permet la détermination de $H(\xi)$ et, enfin, le calcul de Θ .

En conservant, dans l'équation en ϕ , l'expression V calculée à l'aide de $\phi = \theta W$, et en y introduisant Θ sous la forme que nous venons de déterminer, nous pouvons en tirer une solution locale en la considérant comme une équation ordinaire par rapport à η , et obtenir ainsi une amélioration de ϕ et, par la suite, de Θ par itération.

Dans les exemples que l'auteur a calculés à l'O.N.E.R.A. à l'aide de la méthode ci-dessus exposée, les valeurs de Θ et ϕ non-itérées étaient déjà très satisfaisantes. Reste le retour aux coordonnées physiques, en établissant le profil $u(y)$ à l'aide de

$$y = \int_0^u \frac{\mu}{\tau} du.$$

Comme dans le cas de la plaque plane, cette intégration n'est pas très précise à cause de la singularité de la quantité à intégrer pour $u \sim u_e$.

Toutefois, les profils établis à l'aide de cette intégrale se trouvent, comme le montre l'exemple de la figure 29, en bon accord avec le profil correspondant obtenu par la méthode du paragraphe 2 de ce chapitre.

Les résultats numériques sont donnés (et confrontés avec ceux des méthodes précédentes) dans l'annexe, cf. fig. 27-30.

IV - ÉTUDE DES GRANDEURS CARACTÉRISTIQUES POUR LA DÉTERMINATION DE LA COUCHE LIMITE LAMINAIRE A L'AIDE DE LA MÉTHODE HODOGRAPHIQUE DU CHAPITRE PRÉCÉDENT.

1. INFLUENCE DE LA VITESSE ET DU GRADIENT DE LA VITESSE HORS DE LA COUCHE LIMITE.

1. La coïncidence, très heureuse, entre les résultats des trois méthodes que nous venons d'exposer dans le chapitre précédent, montre que l'influence des profils initiaux (aussi bien des vitesses que des températures) sur la couche limite laminaire à deux dimensions est négligeable. Ce résultat ne doit pas étonner : En effet, nous avons déjà souligné (cf. paragraphe 1 du premier chapitre) que les simplifications de PRANDTL perdent, près du bord d'attaque, toute signification et que leur application à cette région n'a qu'une valeur, très limitée, d'extrapolation.

De plus, dans tout problème physique, les irrégularités inévitables de la forme de l'obstacle près du bord d'attaque ont une importance relative d'autant plus grande que la couche limite elle-même y est plus mince. Nous renvoyons le lecteur aux travaux fort intéressants de BARDSLEY & MAIR à ce sujet, [14]. L'influence d'une telle irrégularité doit s'effacer, nécessairement, sur une distance très courte.

2. L'analyse du paragraphe 4 du chapitre III nous montre les raisons mathématiques de cette faible influence : la faible variation de $\rho\mu$ d'un côté et l'affinité entre les profils des vitesses et des températures de l'autre, permettent une intégration locale du système des équations de la couche limite qui se décompose, par ce fait, en deux équations quasi-ordinaires indépendantes.

Pour cette intégration locale, les valeurs de $w_e(\xi)$ et de $w'_e(\xi)$ sont spécialement importantes comme on le voit immédiatement sur les formules du paragraphe précédent.

Pour mettre en évidence ce rôle important de w_e et de w'_e , on a considéré deux écoulements différents, dont l'un est donné par $w_e(\xi) = \frac{\xi(\xi + 5)}{(\xi + 1)^2}$, l'autre par :

$w_e = 0,375$	et	$w'_e \equiv 0$	pour	$0 \leq \xi \leq 0,02$
$w_e = 0,379$	et	$w'_e = 0,7$	pour	$\xi = 0,03$
$w_e = 0,388$	et	$w'_e = 1,3$	pour	$\xi = 0,04$
$w_e = 0,4048$	et	$w'_e = 2,176$	pour	$\xi = 0,05$
		$w'_e \equiv 2,176$	pour	$0,05 \leq \xi \leq 0,25$
		et identique au premier	pour	$\xi \geq 0,25$

Les deux écoulements, quoique totalement différents, le premier présentant un point d'arrêt, le second n'en ayant pas, ont conduit, au point $\xi = 0,25$, pour $\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_p = 0$ et des conditions à l'infini aval identiques, à la même épaisseur de quantité de mouvement, calculée d'après les méthodes des paragraphes 1 et 3 du chapitre III, donc à des couches limites sensiblement équivalentes.

La vitesse et le gradient de vitesse locaux décident donc, toutes choses égales par ailleurs, du comportement local de la couche limite. Cependant, leurs valeurs à l'amont du point ξ considéré, n'ont pratiquement pas d'effet sur la forme de la couche limite. Ainsi s'explique cette indifférence de la couche limite vis-à-vis des conditions initiales : elles n'influencent que le comportement local de la couche limite et ne jouent un rôle qu'à la tête même de l'obstacle.

2. LE COMPORTEMENT THERMIQUE DE LA PAROI DE L'OBSTACLE.

1. La plupart des méthodes connues jusqu'ici se sont limitées à l'étude du cas de la paroi isolante. C'est, en effet, la condition qui permet, de la même façon qu'en incompressible (cf. chapitre II, paragraphe 2), de déterminer $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_p$ sans avoir recours à l'équation de l'énergie et d'établir une condition à la paroi pour les dérivées secondes des vitesses et des températures.

Cependant, les travaux de WALZ et de WIEGHARDT ont montré (cf. chapitre II, paragraphe 2) que cette condition pour $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_p$, considérée souvent comme essentielle, n'est pas indispensable en incompressible : en effet, elle peut être remplacée, avec succès, par une condition globale sur l'énergie.

Dans l'attente d'une adaptation des travaux de WIEGHARDT et de WALZ aux écoulements compressibles, la méthode du chapitre III, paragraphe 2, donne, pour la première fois, une possibilité de se débarrasser, en écoulement compressible, d'une condition qui n'a plus la même raison d'être qu'en régime incompressible.

2. Cependant, la méthode du paragraphe 2 du chapitre III ne donne pas encore la solution correspondant à des conditions arbitraires à la paroi : nos démonstrations se limitent aux cas d'une paroi imperméable ou d'une température de paroi donnée.

Le cas général, dans lequel on se donne, tantôt une condition sur le gradient à la paroi (non nécessairement nul), tantôt la température à la paroi, ne peut pas être traité par des méthodes pas-à-pas ou, plus généralement, par des méthodes exigeant une intégration complète depuis le bord d'attaque jusqu'à l'abscisse ξ demandée.

C'est là où réside l'intérêt principal de la méthode semi-hodographique que nous avons proposée dans le chapitre précédent : en effet, cette méthode permet la détermination de la couche limite en partant des données locales des vitesses et températures; la condition pariétale sur la température peut comporter aussi bien la donnée de θ_p que de $\frac{\partial \theta}{\partial y}_p$, ceci en chaque point et indépendamment des données en tous les points amont.

La méthode semi-hodographique proposée paraît donc plus logique et mieux adaptée au cas compressible que les autres méthodes, plus ou moins liées à la condition $\left(\frac{\partial i}{\partial y}\right)_p = 0$ héritée des méthodes incompressibles.

Nous retrouvons ainsi une autre justification du traitement local des équations de la couche limite.

3. INFLUENCE DE LA DISTANCE PARCOURUE LE LONG DE LA PAROI DEPUIS LA NAISSANCE DE LA COUCHE LIMITE.

1. Si, effectivement, la couche limite ne dépendait que de $w_e(\xi)$, $w'_e(\xi)$ et de la condition thermique à la paroi*, la couche limite serait la même partout, où ces conditions sont identiques. La plaque plane dans le cas $\hat{\theta}_p \equiv 0$ est un contre-exemple immédiat.

En effet, si nous revenons aux équations et solutions du paragraphe 3 du chapitre III, nous devons constater la présence d'une quatrième grandeur, l'abscisse ξ , qui intervient (en plus de sa présence implicite dans $w_e(\xi)$, $w'_e(\xi)$, etc.) explicitement dans les formules de détermination de $H(\xi)$.

Cette grandeur ξ , la distance au bord d'attaque du profil, résume, pour ainsi dire, l'"histoire" de la couche limite, en tenant compte de la distance déjà parcourue par l'écoulement.

2. Cette distance se révèle donc d'une importance primordiale pour la détermination de la couche limite, ce qui oblige à reconsidérer la théorie de la naissance effective de la couche limite dans les écoulements sans point d'arrêt.

Dernièrement, deux essais très intéressants ont été tentés dans cette voie, en régime incompressible, par la considération de variables locales dans le voisinage du bord d'attaque (cf. R. LEGENDRE [15] et G.F. CARRIER & C. C. LIN [16]).

Les travaux de LAGERSTROM [2] en régime supersonique avec onde de choc détachée et une recherche récente de R. BADER semblent confirmer les résultats obtenus par R. LEGENDRE en incompressible, c'est-à-dire un commencement effectif de la couche limite de la plaque plane avant le bord d'attaque. Ces résultats (jusqu'ici qualitatifs) jettent, néanmoins, une nouvelle lumière sur ce que nous venons d'exposer.



* et, naturellement, de l'état du fluide par exemple à l'infini.

V - DÉTERMINATION DES POINTS CRITIQUES.

1. LE POINT DE DÉCOLLEMENT LAMINAIRE.

1. Nous conservons dans ce qui suit la définition du point de décollement que nous avons donnée dans le paragraphe 3 du premier chapitre. Elle conduit, cf. page 18, au critère de décollement bidimensionnel. Comme en incompressible, on en déduit que nécessairement $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_p > 0$. D'autre part, la façon dont u rejoint, pour $u \rightarrow u_e$, la vitesse de l'écoulement extérieur, conduit dans tous les cas à $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_e > 0$. D'où la conclusion que le décollement n'est possible que pour des profils de vitesse présentant un point d'inflexion.

Quand $\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)_p \equiv 0$, comme c'est le cas en régime incompressible et, plus généralement, dans le cas du problème du thermomètre $\left(\left(\frac{\partial i}{\partial y}\right)_p \equiv 0\right)$, l'équation du mouvement à la paroi :

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)_p \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_p + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_p = \frac{dp}{dx}$$

devient

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_p = \frac{dp}{dx}$$

Cette condition, bien connue ("Wandbindung" dans la littérature allemande), est à la base de tous les calculs du type POHLHAUSEN; elle fait comprendre pourquoi, jusqu'ici, la plupart des méthodes compressibles - comme par exemple celle du paragraphe 1 du chapitre précédent - n'étaient valables que pour le problème du thermomètre. WIEGHART et WALZ ont réussi, en incompressible, cf. paragraphe 2 du second chapitre, à s'en débarrasser par l'introduction, à sa place, d'une condition intégrale sur l'énergie.

Or, de $\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_p = \frac{dp}{dx}$ et de la nécessité que $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_p > 0$ pour le décollement, on tire la fameuse condition que $(dp)/(dx) > 0$ pour qu'il y ait décollement.

2. Dans le cas général (écoulement compressible et condition thermique à la paroi quelconque), $\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)_p$ sera, en général, différent de zéro. La "Wandbindung" ne sera plus valable que pour $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_p = 0$, c'est-à-dire, au point de décollement même. Elle se transforme donc d'une condition générale en un critère du décollement. Elle confirme, d'ailleurs, que dans le cas compressible et pour condition thermique arbitraire le décollement exige $(dp)/(dx) > 0$.

Cependant, une deuxième conclusion, importante pour le calcul, peut être tirée de cette nouvelle condition de décollement (jusqu'ici, à notre connaissance, non signalée dans la littérature) : μ étant une fonction qui ne prend que de faibles valeurs numériques, $\frac{1}{\mu_p} \frac{dp}{dx}$ est d'autant moins bien déterminée (comme quotient de deux petits nombres) que $(dp)/(dx)$ est plus petite. Les difficultés numériques d'une détermination précise de $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_p$ d'autre part, rendent assez peu exacte la détermination de l'abscisse de décollement. Ceci correspond au fait expérimental bien connu que le point de décollement est peu stable aux faibles gradients de la pression. Dans l'exemple numérique choisi pour l'application des méthodes du troisième chapitre, voir annexe, le gradient de la pression après le minimum a été choisi, exprès, très faible. En effet, les valeurs du point de décollement, ainsi obtenues, diffèrent beaucoup bien qu'on soit en présence du cas classique – seul admissible pour la méthode de GRUSCHWITZ – du problème du thermomètre pour les trois méthodes concurrentes.

La détermination du point de décollement reste donc, en régime bidimensionnel, une opération délicate et peu exacte, dont la raison intrinsèque ne se comprend que par la considération du décollement tridimensionnel. En effet, une récente publication [17] commune de l'auteur et de A. OUDART montre que le décollement bidimensionnel constitue une forme dégénérée du décollement à trois dimensions. Sa forme mathématique est, alors, nécessairement moins précise et plus difficilement abordable, surtout au calcul numérique.

Dans la théorie tridimensionnelle on voit d'ailleurs immédiatement que le point de décollement laminaire ne dépend pas du nombre de Reynolds. Comme dans le calcul bidimensionnel, où la condition $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_p = 0$ est indépendante de R , ce fait est important parce qu'il situe le point de décollement laminaire dans presque la totalité des cas après la transition laminaire-turbulent. En effet, le nombre de Reynolds critique, pour lequel la transition a lieu, est relativement faible et presque toujours dépassé peu après le minimum de pression, cf. le paragraphe suivant.

2. LA TRANSITION.

1. La connaissance du point de transition présente donc, pour une théorie complète de la couche limite laminaire, un intérêt qui dépasse celui du calcul du décollement laminaire.

En régime incompressible, beaucoup de procédés existent pour déterminer le point d'instabilité de la couche limite laminaire, c'est-à-dire l'endroit à partir duquel peuvent se propager sans amortissement les petites perturbations ayant certaines fréquences particulières. Le point de transition lui-même se trouve plus ou moins en aval de ce point d'instabilité; en effet, la présence effective de perturbations à la fréquence d'autoentretien dépend de facteurs étrangers à la théorie que nous avons exposée : courbure locale de la paroi, rugosité de la paroi, état de pureté du fluide, variations locales de la température, etc... Pour les procédés de détermination du point d'instabilité en régime incompressible, cf. SCHLICHTING [18], chapitres XVI et XVII.

2. Récemment, a paru, sur la stabilité des couches limites laminaires compressibles avec gradient de pression extérieur, un travail fort intéressant de J.A. LAURMANN [19], qui revêt un intérêt particulier pour nous étant donné qu'il confirme le caractère local des équations de la couche limite par un critère de stabilité local. Nous renvoyons le lecteur à la publication de ce travail dans le GRANFIELD-reports.

Nous retenons comme J.A. LAURMANN que – pour le calcul des grandeurs caractéristiques de la couche limite – le calcul des courbes de stabilité (cf. figure 31) s'effectue à partir de celui de l'écoulement sans gradient de pression, appliqué à la couche limite caractérisée par les profils locaux des vitesses et des températures.

La stabilité est assurée pour les nombres de Reynolds inférieurs aux nombres critiques représentés figure 31, en fonction du nombre de Mach, et ayant comme paramètre l'exposant m des courbes de HARTREE, interpolant localement la vitesse extérieure.

Le nombre de Reynolds critique est formé avec la vitesse extérieure correspondant à la courbe de HARTREE et l'épaisseur de quantité de mouvement de la couche limite (laminaire) locale.

Nous notons avec intérêt que, pour le problème plus restreint de la transition, LAURMANN a adopté les mêmes principes de simplification qui nous ont guidés dans le paragraphe 3 du chapitre III.

Il est, en plus, à retenir que les résultats obtenus sont qualitativement analogues aux résultats, en incompressible, de TOLLMIEH et SCHLICHTING : influence favorable d'un gradient de pression négatif sur la stabilité de la couche limite, influence défavorable d'un gradient de pression positif, donc transition peu après le minimum de pression. L'influence d'un nombre de Mach croissant est, en général, défavorable pour la stabilité; cependant il existe, pour un gradient de pression négatif et $1,3 \leq M \leq 2,4$, une zone de stabilité totale qui se voit nettement dans la figure.

En connexion avec ces constatations, on peut confirmer un résultat obtenu par GÖRTLER [20] en incompressible : l'influence stabilisante d'une paroi convexe, déstabilisante d'une paroi concave.

3. Il est intéressant de noter que, dans un travail récent, GÖRTLER a assimilé l'écoulement extérieur au voisinage du bord d'attaque à celui le long d'une concavité de la surface (ce qui est immédiatement évident par exemple pour le dièdre). GÖRTLER suppose, par conséquent, que la couche limite près du bord d'attaque sera, en général, turbulente, de façon que les calculs et théories classiques sont inapplicables au point de naissance de la couche limite, en accord avec nos considérations du chapitre III.

3. LE POINT DE LA NAISSANCE DE LA COUCHE LIMITE.

1. La présence éventuelle de ce que GÖRTLER appelle un "bulbe turbulent" au bord d'attaque de l'obstacle modifie le point de "commencement effectif" de la couche limite. En effet, un tel bulbe entraîne, par rapport aux prévisions déduites de la théorie classique par extrapolation, une surépaisseur de la couche limite à la pointe de l'obstacle. La couche limite (qui redevient peu après laminaire sous l'influence du gradient de pression et de la convexité de la paroi même de l'obstacle) se comportera donc comme si elle avait pris naissance en amont du bord d'attaque de l'obstacle. Or, ceci change la distance parcourue par la couche limite, vis-à-vis de la théorie "classique" que nous venons d'exposer. D'autre part, nous avons vu dans le paragraphe 3 du chapitre précédent que la distance effective parcourue le long de la paroi jusqu'à l'endroit considéré est une des grandeurs essentielles.

Il est donc d'importance primordiale de déterminer d'une façon efficace le comportement de la couche limite à sa naissance. Malheureusement, jusqu'ici n'existent que quelques essais qualitatifs permettant d'étudier cette question. Nous les avons signalés dans l'introduction, paragraphe 3.

2. Le problème devient encore plus difficile, mais en même temps encore plus important en écoulement supersonique lorsque l'on est en présence d'une onde de choc, attachée ou détachée, devant l'obstacle.

Nous essayerons d'esquisser, dans les chapitres suivants, deux tentatives différentes d'aborder ce problème; le premier procédé, qui s'inspire d'une idée de R. LEGENDRE, a donné lieu à un calcul numérique que l'auteur a effectué à l'O.N.E.R.A.. Le deuxième a pour point de départ les travaux connus et fort prometteurs de H. CABANNES [21] en fluide non visqueux.

L'auteur qui a essayé de rendre, par une transformation, les équations de NAVIER-STOKES plus maniables au calcul, a rencontré, cependant, plusieurs difficultés de principe que nous traiterons dans le dernier chapitre.



VI - COUCHE LIMITE ET ONDE DE CHOC.

1. L'ÉCOULEMENT VISQUEUX A LA TÊTE DE L'OBSTACLE.

1. Les considérations des chapitres précédents supposent la présence, autour de l'obstacle bidimensionnel, d'un écoulement potentiel "extérieur" à la couche limite. Cette hypothèse n'est vérifiée qu'en absence de phénomènes de choc, ou tout au plus derrière une onde de choc attachée telle que la présente la théorie classique de l'écoulement supersonique autour d'un d'un dièdre de faible ouverture.

A la rigueur elle restera applicable en présence d'un choc faible, en négligeant la zone voisine du bord d'attaque ou de la ligne d'impact, dans les cas où l'onde de choc est détachée.

Mais même dans le cas d'une onde de choc nettement détachée et à grand rayon de courbure au sommet, il est impossible de considérer l'écoulement autour du corps comme irrotationnel, ou de le remplacer, avec une chance de représenter correctement les phénomènes, par un écoulement potentiel voisin.

Il est alors impossible d'appliquer la théorie de la couche limite (nécessairement compressible) telle que nous l'avons exposée dans les chapitres précédents.

Les hypothèses simplificatrices que nous avons discutées dans le premier paragraphe de l'introduction (chapitre I) n'étant plus vérifiées, aucune théorie de la couche limite proprement dite n'est plus possible.

Aussi s'est-on contenté de traiter le problème de l'onde de choc en négligeant l'effet de la viscosité, point de vue qui a été justement critiqué, entre autres par exemple par LAGERSTROM [2]. En effet, la théorie de PRANDTL montre clairement que dans le voisinage du corps, la viscosité joue un rôle prépondérant, un rôle qui reste important même et surtout là où les simplifications de PRANDTL ne sont plus applicables.

Nous avons, en effet, vu (dans le paragraphe 2 de l'introduction) que la viscosité, dans la théorie de PRANDTL, a pour effet d'épaissir le corps (épaisseur de déplacement) et même d'en

modifier la forme. Nous reviendrons sur ce point dans le paragraphe suivant de ce chapitre.

2. Malheureusement, même dans le cas indûment simplifié par l'abandon des effets de viscosité, il n'est pas encore possible d'obtenir, pour un corps de forme quelconque, la position et la forme de l'onde de choc en amont.

En effet, les solutions avec lignes ou plans de discontinuités des systèmes d'équations aux dérivées partielles sont encore très mal connues. Il est probable que la théorie des distributions, récemment développée par L. SCHWARTZ, permettra d'attaquer d'une façon plus efficace ce problème.

Dans l'état actuel des choses, on n'a que quelques méthodes plus ou moins grossières à sa disposition pour traiter le problème de l'onde de choc en amont d'un obstacle donné, cf. par exemple MOECKEL [22].

Nous nous voyons donc, en régime supersonique, devant une double difficulté : celle de résoudre, pour un corps donné, les équations de l'écoulement non visqueux autour de ce corps, en déterminant une solution comportant une ligne de discontinuité en amont, et celle de trouver, pour les équations complètes, c'est-à-dire comportant les termes visqueux, des simplifications qui s'adaptent aussi bien à la théorie des ondes de choc qu'à celle de la couche limite.

On est loin de la résolution de ces deux difficultés; il y en a d'ailleurs d'autres, comme celle de poser correctement les conditions aux limites à la paroi sans recourir à des hypothèses (par exemple sur la pression) qui impliquent la théorie de PRANDTL, l'influence de la viscosité dans la théorie de l'onde de choc détachée, etc...

Par conséquent, nous nous trouvons devant l'impossibilité de traiter, mathématiquement, le problème non simplifié et, en même temps, de déterminer des simplifications physiques raisonnables. C'est pourquoi G.S.S. LUDFORD [23] souligne, dans un article récent, la nécessité de déterminer un nombre maximum d'écoulements calculés avec le minimum d'hypothèses.

3. Notre point de départ doit être, par conséquent, dans tous les cas, le système complet des équations de NAVIER-STOKES et de l'équation de l'énergie.

Ce système que nous avons déjà cité, dans la forme que lui ont donnée ACKERET et CROCCO [1], dans le premier chapitre, paragraphe 1, à la forme, cf. page 6, d'un système d'équations à dérivées partielles du deuxième ordre pour les inconnues u , v , i et du premier ordre en p . Il est non-linéaire et ne se décompose pas, les inconnues n'étant pas découplées dans les équations.

Là où il est possible de négliger l'influence des termes visqueux — question qui nécessitera, dans le paragraphe 3 du présent chapitre, une discussion plus détaillée — le système prend la forme beaucoup plus simple

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

$$\rho(uu_x + vv_y) = -p_x$$

$$\rho(uv_x + vv_y) = -p_y$$

$$\rho(ui_x + vi_y) = p_x u + p_y v$$

toujours non-linéaire et ne se décomposant pas, mais néanmoins du premier ordre pour toutes les inconnues.

Dans le cas d'un problème de CAUCHY, dont la pose correcte sera discutée plus tard, il suffit donc de disposer des valeurs de u , v , i et p , sans recours aux dérivées.

2. MÉTHODE ITÉRATIVE PROPOSÉE PAR R. LEGENDRE.

1. L'idée la plus simple pour attaquer le problème d'un obstacle placé, en bidimensionnel, dans un écoulement (légèrement) supersonique consiste à considérer l'écoulement à proximité du corps (à l'exception éventuelle de la région près du bord d'attaque, de toute façon mal connue) comme non-rotationnel, l'écoulement à grande distance à l'amont de l'obstacle comme non-visqueux, et de déterminer les solutions respectives par itérations successives.

L'auteur a exécuté une telle discussion sur proposition de R. LEGENDRE. Il a choisi une plaque plane avec les caractéristiques suivantes (tirées d'un essai effectué par MM. BOUNIOL et GUIENNE):

$M_0 = 1,96$; air avec $T_r = 11^\circ C = 284^\circ K$ au repos et pression atmosphérique.

On calcule d'abord la couche limite de la plaque telle qu'elle s'établirait sans onde de choc, donc éventuellement lors de la mise en route de la soufflerie, avant la formation de l'onde. Épaissie de cette couche limite, la plaque forme un nouveau corps, dont le profil est déterminé en chaque point, pour les besoins du calcul de l'écoulement non-visqueux qui doit suivre, par l'épaisseur locale de déplacement.

La théorie de la couche limite d'une plaque plane indique que le profil du nouveau corps (= plaque + épaisseur de déplacement) est parabolique. Ce corps est donc doté d'un point d'arrêt; il se formera, devant lui, une onde de choc détachée, dont la distance à l'obstacle ainsi que le rayon de courbure peuvent être déterminés d'après la méthode de МОЕСКЕЛ.

L'onde se révélera extrêmement faible, justifiant l'hypothèse d'un écoulement aval pratiquement irrotationnel à très faible distance du sommet. On peut alors appliquer la méthode du troisième chapitre, paragraphe 3b) et calculer, à nouveau, la couche limite.

La méthode converge rapidement, mais ne réussit pas à expliquer une différence assez importante avec les essais de MM. BOUNIOL et GUIENNE. A la fin de ce paragraphe, nous essayerons de discuter les raisons de ce désaccord entre théorie et expérience. On se trouvera alors directement conduit vers la méthode numérique du paragraphe 3 de ce chapitre.

2. A cause de son intérêt de principe et puisqu'il s'agit d'une application numérique assez intéressante des méthodes des paragraphes 1 et 3 du chapitre III, nous exposons la marche du calcul en détail; dans ces calculs, l'indice 0 caractérise l'état du fluide à l'infini amont, l'indice r désigne les conditions d'arrêt isentropique.

D'après la formule de SAINT-VENANT, on trouve :

$$\frac{u_0^2}{c^2} = M_0^2 = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_r}{\rho_r} \left[1 - \left(\frac{p_0}{p_r} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] : \gamma \frac{p_r}{\rho_r} \cdot \left(\frac{p_0}{p_r} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{2}{\gamma-1} \left[\left(\frac{p_r}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\gamma-1}{2} M_0^2 + 1 = \left(\frac{p_r}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

ou bien

$$\left(\frac{p_0}{p_r} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2}$$

d'où

$$p_o = p_r \frac{1}{\left(1 - \frac{\gamma-1}{2} M_o^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} = p_r \frac{1}{(1+0,2 \cdot 1,96^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{p_r}{(1,76832)^{\frac{1}{2}}} = 0,13600 p_r$$

$$\frac{T_o}{T_r} = \left(\frac{p_o}{p_r}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 0,13600^{\frac{1}{2}} = 0,56551$$

$$T_o = 284 \cdot 0,56551 = 161 \text{ (en } ^\circ \text{K)}, \text{ d'où } T_o = -112^\circ \text{C}$$

De même on obtient

$$\frac{\rho_o}{\rho_r} = \left(\frac{T_o}{T_r}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left(\frac{T_o}{T_r}\right)^{\frac{1}{2}} = 0,56551^{\frac{1}{2}} \cdot 0,75200 = 0,24049$$

$$\frac{\mu_o}{\mu_r} = \frac{T_r + C}{T_o + C} \cdot \left(\frac{T_o}{T_r}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{402}{279} \cdot 0,56551 \cdot 0,75200 = 0,61274$$

$$\frac{\nu_o}{\nu_r} = \frac{\mu_o}{\mu_r} \cdot \frac{\rho_r}{\rho_o} = 2,54788 \quad c_o = \sqrt{1,4 \cdot 9,81 \cdot 9,27 \cdot 161} = 254,4 \text{ (en m/s)}$$

$\nu_r = 14 \cdot 10^{-6}$ (en m^2/s) pour l'état du repos indiqué page 87 ; alors

$$\nu_o = 2,54788 \nu_r = 35,67 \cdot 10^{-6} \text{ (m}^2/\text{s)}$$

$$u_o = 1,96 \cdot c_o = 498,6 \text{ (m/s)}$$

$$\frac{\nu_o}{u_o} = 0,07154 \cdot 10^{-6} \text{ (m)} \quad \sqrt{\frac{\nu_o}{u_o}} = 0,26747 \cdot 10^{-3} \text{ (m}^{\frac{1}{2}}\text{)}$$

L'état du fluide à l'amont de la plaque dans la veine d'essai était donc donné par

$$M_o = 1,96 \quad T_o = 161^\circ \quad \sqrt{\frac{\nu_o}{u_o}} = 0,26747 \cdot 10^{-3} \text{ (m}^{\frac{1}{2}}\text{)}$$

Le calcul de la couche limite de la plaque plane peut être effectué d'après la méthode du chapitre 3, paragraphe 3 a, pour $\theta_p = 0$, $M_o = 1,96$, $\mathcal{P} = 0,725$. Avec $\theta = T/T_o$ et $\eta = u/u_o$, l'on

obtient $\theta_p = 1,65797$ et $\int_0^1 \left(1 - \frac{\eta}{\theta}\right) \frac{\mu}{\mu_p} \frac{d\eta}{g(\eta)} = 1,48189$. L'épaisseur de déplacement est alors :

$$\delta_d = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\right) dy = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\eta}{\theta}\right) dy$$

et puisque

$$dy = \sqrt{\frac{2 \mu_p x}{u_o \rho_p}} \cdot \frac{\mu}{\mu_p} \cdot \frac{d\eta}{g(\eta)}$$

on trouve

$$\delta_d = \int_0^1 \left(1 - \frac{\eta}{\theta}\right) \frac{\mu}{\mu_p} \frac{d\eta}{g(\eta)} \cdot \sqrt{\frac{2 \mu_p x}{u_o \rho_p}}$$

L'intégrale est connue à un facteur numérique près. Pour son calcul on trouve :

$$\frac{\mu_p}{\rho_p} = \frac{\mu_p \rho_o}{\mu_o \rho_p} \frac{\mu_o}{\rho_o} = \theta_p^{\frac{1}{2}} \frac{1 + \theta_c}{\theta_p + \theta_c} \nu_o$$

d'où enfin

$$\sqrt{\frac{2 \mu_p x}{u_o \rho_p}} = 2,26477 \sqrt{\frac{\nu_o}{u_o} x}$$

$$\delta_d = 1,48189 \cdot 2,26477 \sqrt{\frac{\nu_o}{u_o} x} = 3,35614 \sqrt{\frac{\nu_o}{u_o} x}$$

Cette valeur est à 5% près confirmée par la méthode GRUSCHWITZ (chapitre 3, paragraphe 1) qui donne

$$3,513\,25 \sqrt{\frac{v_0}{u_0}} \sqrt{x}$$

Avec la valeur de

$$\sqrt{\frac{v_0}{u_0}} = 0,26747 \cdot 10^{-3} (\text{m}^{1/2}),$$

on trouve

$$\delta_d = 0,00090 \cdot \sqrt{x} \text{ (m)}$$

Comme épaisseur δ de la couche limite, correspondant à $\eta = 0,99$, on obtient

$$\delta = \int_0^{0,99} \sqrt{\frac{2\mu_p x}{u_0 \rho_p}} \cdot \frac{\mu}{\mu_p} \cdot \frac{d\eta}{g(\eta)} = 2,264\,77 \sqrt{\frac{v_0}{u_0}} \sqrt{x} \int_0^{0,99} \frac{\theta^{3/2} \frac{1+\theta_c}{\theta+\theta_c}}{\theta^{3/2} \frac{1+\theta_c}{\theta+\theta_c}} \frac{d\eta}{g(\eta)} = 0,00180 \sqrt{x}.$$

Les expériences de MM. BOUNIOL & GUIENNE ont fourni, pour $x = 0,01 \text{ m}$, la valeur $\delta_{\text{exp.}} = 0,00045$. La même valeur, obtenue par deux méthodes différentes, donne par la théorie $\delta = 0,00018$.

La différence, qui est trop grande pour pouvoir être imputée à la théorie de la couche limite, assez bien confirmée, demande une explication que nous cherchons d'abord en tenant compte de la présence d'une onde de choc devant l'obstacle.

Or, en effet, la plaque forme, avec sa couche limite, un obstacle à l'écoulement qui est équivalent (cf. chapitre I, paragraphe 2) au corps formé par la plaque dilatée transversalement de l'épaisseur du déplacement. Ce corps hypothétique a un profil d'équation $y = 0,00090 \sqrt{x}$, sa pente est $0,00045 \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Le nouveau corps ayant un profil parabolique possède donc un point d'arrêt. L'onde de choc à sa tête sera, par conséquent, détachée. Pour déterminer son rayon de courbure et sa distance au corps, nous appliquons une théorie géométrique établie récemment par МОЕСКЕЛ [22] (N.A.C.A. T.N. 1921). Sa méthode repose essentiellement sur l'hypothèse que la ligne sonique est en première approximation une droite reliant le point sonique sur l'onde de choc (connue par les équations du choc dans l'hypothèse que l'onde soit, au voisinage du corps, assimilable à une hyperbole) et le point sonique sur le corps. En ce dernier, les tangentes au profil forment un angle égal à celui du dièdre limite qui, placé dans l'écoulement supersonique, provoquerait le détachement de l'onde de son sommet. Pour $M_0 = 1,96$ et $2\alpha =$ angle du dièdre, on a $\alpha = 22^\circ$, $\text{tg } \alpha = 0,40403$.

Dans notre cas on a donc $0,00045 \frac{1}{\sqrt{x}} = 0,40403$, ou bien $\sqrt{x} = 0,0011138$ d'où $x_{ps} = 0,0000012405 \text{ (m)} \simeq 1,24 \mu$ (l'indice ps signifie "point sonique" sur le corps). L'ordonnée correspondante se trouve, d'après les graphiques de МОЕСКЕЛ, égale à $y_{ps} = 0,00090 \sqrt{x} = 0,000001002 \simeq 1 \mu$.

La tête de l'onde se trouve, toujours d'après МОЕСКЕЛ, à la distance $L = y_{ps} / \text{tg } \alpha = 0,000002480 \simeq 2,48 \mu$ devant x_{ps} .

La distance de la tête de l'onde à la pointe du profil est, par conséquent, $L - x_{ps} = 0,000001240 \simeq 1,24 \mu$.

Enfin, la distance entre le point d'intersection des asymptotes et la tête de l'onde est $x_0 = 18,22 y_{ps} = 18,25 \mu$.

On obtient alors comme équation de l'onde de choc l'hyperbole

$$\frac{(x + 0,0000195)^2}{(0,000018256)^2} = \frac{y^2 (\sqrt{M_0^2 - 1})^2}{(0,000018256)^2} = 1$$

La configuration qui en résulte est donnée figure 32.

On se voit en présence d'un choc infiniment faible qui déjà à 10μ de la pointe de l'obstacle est pratiquement parallèle à l'onde de Mach de l'écoulement amont.

L'écoulement à environ 10000μ ($x \cong 0,01$), premier point de mesure, peut donc être considéré comme à potentiel, avec $M_0 = 1,96$, et la condition aux limites pour $y = 0$ est donnée par la pente de l'obstacle.

Si le potentiel de perturbation est appelé ϕ , on a alors

$$(M_0^2 - 1) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

dont la solution est

$$\phi = f_1 \left(y - \frac{x}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \right)$$

avec la condition aux limites

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} : u_0 \right) = \frac{d(0,00090 \sqrt{x})}{dx}$$

Or, on a

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = f_1' \cdot \frac{\partial \left(y - \frac{1}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \right)}{\partial y} = f_1'$$

d'où

$$\lim_{y \rightarrow 0} f_1' = \frac{d}{dx} (u_0 \cdot 0,00090 \sqrt{x}) = u_0 \cdot 0,00045 \frac{1}{\sqrt{x}}$$

donc :

$$f_1 = - \frac{u_0}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \cdot 0,00090 \sqrt{- \left(y - \frac{x}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \right)}.$$

La vitesse de perturbation en direction de x est :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial \phi}{\partial x} = f_1' \left(- \frac{1}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \right) = - \frac{0,00045 u_0}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{M_0^2 - 1}}$$

La vitesse résultante en direction x le long de la paroi de l'obstacle est alors, suffisamment loin de la pointe :

$$u(x) = u_0 \left(1 - \frac{0,00045}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = u_0 \left(1 - 0,000267 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \right).$$

$$u'(x) = 0,0001335 \frac{u_0}{x\sqrt{x}}.$$

Nous nous trouvons donc en présence d'un écoulement quasi-potentiel, dont la vitesse extérieure est donnée par $u_e(x) = u(x)$.

La couche limite engendrée sur la plaque par un tel écoulement à vitesse extérieure (donc à pression) variable se calcule à l'aide de la méthode du chapitre III, paragraphe 3 b :

Nous introduisons des grandeurs sans dimension, en prenant comme longueur de référence celle de la plaque utilisée dans les essais, $l = 0,1\text{m}$, et comme vitesse de référence u_0 . On

trouve $\xi = \frac{x}{l}$, $w_e(\xi) = \frac{u(\xi)}{u_0}$, d'où

$$w_e(\xi) = 1 - 0,000844 \frac{1}{\sqrt{\xi}}$$

$$w_e'(\xi) = \frac{0,000422}{\xi \sqrt{\xi}}$$

$$\frac{w_e'(\xi)}{w_e(\xi)} = \frac{0,000422}{\xi(\sqrt{\xi} - 0,000844)}$$

Le calcul local sera appliqué, pour la comparaison avec les résultats de mesure, à la valeur de $\xi_1 = x/l = 0,01/0,1 = 0,1$, $\sqrt{\xi_1} = 0,31623$.

On calcule d'abord la couche limite de la plaque plane sans gradient de pression d'après la méthode du chapitre III, paragraphe 3a), pour $\theta_p = 0$, $M_0 = 1,96$, $\theta(1) = 1$, d'où l'on tire une première approximation de $\theta(\eta)$. De plus, on a :

$$\begin{aligned} w_e(\xi_1) &= 0,99733, & w_e(\xi_1)^2 &= 0,99467, & w_e'(\xi_1) &= 0,013345 \\ W &= (1 + 0,2M_0^2) - 0,2M_0^2w_e^2 = 1,00410 \\ \frac{\partial W}{\partial \xi} &= -0,4M_0^2w_e w_e' = -0,020452 & \frac{w_e'}{w_e} &= 0,01388 \\ \frac{2}{5} \mathfrak{P} M_0^2 &= 1,11406, & \frac{2}{5} \mathfrak{P} M_0^2 w_e &= 1,10812 \end{aligned}$$

d'où l'on trouve, par la méthode chapitre III, paragraphe 3b, un profil de vitesses corrigé à l'aide de $g(0) = 0,48000$: On a :

$$\Theta_p = H(\xi_1) = 1,08687$$

et

$$\delta_d = 0,0000905$$

ce qui est, à 8% près, la valeur que l'on avait trouvée sans tenir compte de l'onde de choc.

Le calcul itératif effectué ici, dans le cas le plus simple (plaque plane), ne permet donc pas d'expliquer le désaccord entre théorie de la couche limite et expérience, la présence de l'onde de choc devant l'obstacle n'ayant pour conséquence théorique qu'un épaississement très léger de la couche limite.

Etant donné, d'autre part, que l'écoulement au point $x = 0,01$ considéré est équivalent à un écoulement potentiel de vitesse extérieure connue, l'explication de la différence constatée entre le résultat des essais et la théorie ici exposée ne peut être recherchée que dans un comportement de l'écoulement à la tête de l'obstacle, essentiellement différent de celui qu'on obtient par la théorie classique, aussi bien de la couche limite que de l'onde de choc.

En effet, si dans la région immédiatement autour du bord d'attaque de la plaque, la couche limite n'a pas la forme parabolique fournie par l'extrapolation (illicite) de la couche limite du régime établi, la position et le rayon de courbure de l'onde de choc seront totalement différents de ce que nous venons de calculer.

Malheureusement, rien ne semble nous guider pour le moment vers les hypothèses à faire dans cette région cruciale.

Il faut donc changer le point de vue jusqu'ici adopté et étudier l'écoulement qui s'établit dans une région assez restreinte derrière le sommet d'une onde de choc à rayon de courbure donné.

L'écoulement, qui sera rotationnel dans la zone en question, ne pourra probablement n'être atteint que par une voie purement numérique, mais cela donne néanmoins l'espoir de déterminer ainsi la forme de l'obstacle correspondant, en procédant de manière analogue à H. CABANNES [21] dans la théorie qu'il a établi pour le fluide parfait.

Dans le cas où, effectivement, cet espoir serait vérifié par des calculs qui sont prévus à l'Office National d'Etudes et de Recherches Aéronautiques, on pourra recalculer, par la méthode exposée dans ce paragraphe, la position et le rayon de courbure de l'onde de choc correspondant au corps obtenu et évaluer la différence entre l'onde dont on est parti et l'onde obtenue par la méthode ici exposée.

L'auteur exposera, dans le paragraphe suivant, une méthode qui, d'après les premières tentatives d'application numérique qui en ont été faites, semble viable; il discutera, à la fin de ce chapitre et dans le chapitre suivant, des difficultés de principe qui demandent une recherche mathématique actuellement encore au-dessus de nos possibilités d'analyse.

3. EXPOSÉ D'UNE MÉTHODE NUMÉRIQUE POUR LA DÉTERMINATION DE L'ÉCOULEMENT DERRIÈRE LA TÊTE D'UNE ONDE DE CHOC.

1. Le but que nous nous sommes proposé ne permet aucune simplification préalable des équations de base. Nous partons donc du système complet

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

$$\rho(uu_x + vv_y) = -p_x - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} [\mu(u_x + v_y)] + 2 \frac{\partial}{\partial x} (\mu u_x) + \frac{\partial}{\partial y} [\mu(u_y + v_x)]$$

$$\rho(uv_x + vv_y) = -p_y - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} [\mu(u_x + v_y)] + 2 \frac{\partial}{\partial y} (\mu v_y) + \frac{\partial}{\partial x} [\mu(u_y + v_x)]$$

$$\rho(ui_x + vi_y) - p_x u - p_y v = \phi + \frac{I}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\mu i_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu i_y) \right]$$

avec

$$\phi = \mu \left[-\frac{2}{3} (u_x + v_y)^2 + 2(u_x^2 + v_y^2) + (u_y + v_x)^2 \right],$$

μ et ρ étant donnés par

$$\mu = \mu_0 \frac{i_0 + c_p C}{i + c_p C} \cdot \left(\frac{i}{i_0} \right)^{3/2}, \quad \rho = \frac{c_p \cdot p}{r \cdot i}$$

Ce système, du deuxième ordre par rapport aux inconnues u , v , i , et du premier ordre en p , sera étudié dans le milieu aval d'une onde de choc, c'est-à-dire d'une ligne de discontinuité dans le fluide compressible et visqueux.

La seule simplification que nous admettons a priori, concerne cette ligne de discontinuité : nous faisons abstraction, à la traversée de l'onde de choc (détachée), de la viscosité que nous négligerons, également, dans une bande suffisamment petite (nous aurons, plus tard, à préciser les termes "suffisamment petit") contiguë à l'onde.

Dans l'hypothèse où l'écoulement en amont de l'onde de choc est uniforme, les valeurs des inconnues u , v , i , p immédiatement derrière le choc sont connues par les équations classiques du choc. La distribution initiale, sur l'onde de choc, des valeurs de u , v , i et p , ainsi obtenues, ne suffit cependant pas pour la détermination de l'écoulement derrière cette ligne. En effet, étant donné l'ordre des dérivées intervenant dans les équations ci-dessus, on voit que la connaissance des dérivées u_n , v_n , i_n et p_n , normales au choc, est également indispensable.

C'est ici qu'intervient l'hypothèse de non-viscosité de l'écoulement à proximité de l'onde de choc : elle réduit, en effet, les équations à un système du premier ordre en u , v , i et p , permettant ainsi sa solution à l'aide de u , v , i et p seules avec une bonne approximation, dont le degré ne dépend que de la largeur de la zone considérée comme non-visqueuse. Nous avons, par conséquent, la possibilité de déterminer ainsi les valeurs de u_n , v_n , i_n et p_n sur le choc et de résoudre ainsi, après, le système complet.

L'application de cette idée de base n'est possible, bien entendu, que parce qu'on connaît déjà la forme de l'onde de choc. Autrement dit : pour trouver le corps qui correspond à un choc donné, il faut partir d'une forme physiquement raisonnable de l'onde de choc.

Cette méthode a été appliquée par H. CABANNES [21], à l'aide de développements en série des inconnues, au cas des fluides parfaits. Dans notre cas, la méthode des développements, même limités, serait trop lourde. Nous la remplaçons, par conséquent, par une méthode de différences finies, donc de résolution algébrique, tout en gardant le principe du problème "inverse" (c'est-à-dire partant de l'onde de choc et non pas de l'obstacle) introduit par CABANNES.

2. La forme de l'onde de choc détachée devant un obstacle a fait l'objet de plusieurs études assez récentes.

Nous supposons ici qu'un obstacle, symétrique par rapport à l'axe x et de forme d'ailleurs inconnue, ait provoqué dans un écoulement uniforme, bidimensionnel et légèrement supersonique parallèle à cet axe, une onde de choc détachée, également symétrique par rapport à l'axe x .

Comme l'ont démontré SHU [24] et MOECKEL [22] qui l'a appliqué dans son travail déjà cité au paragraphe 2, l'onde de choc peut être représentée, près de l'axe, par l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} = 1$$

où α est l'angle de Mach de l'écoulement avant le choc, et $a = (R)/(\operatorname{tg}^2 \alpha)$ (R = rayon de courbure de la tête de l'onde).

Au loin, comme l'a montré Lighthill (cf. par exemple Legras [25]), le comportement de l'onde de choc est différent.

Cependant, pour la zone qui nous intéresse et qui comprend la région au voisinage du sommet de l'obstacle, l'hyperbole constitue une approximation suffisante. En effet, il s'agit ici surtout d'expliquer, par l'étude du fluide près du bord d'attaque, les anomalies de la méthode du paragraphe 2, qui reste applicable quand on a pu déterminer, par une investigation plus détaillée, distance et courbure de l'onde de choc devant le corps.

Or, les moyens analytiques à notre disposition ne suffisant pas pour la résolution du système page 92, nous appliquerons comme nous l'avons déjà indiqué, un procédé de calcul pas-à-pas en partant de la distribution des inconnues donnée sur l'onde de choc.

3. Mais il est peu commode, dans une telle méthode, de partir d'une hyperbole. On cherchera donc d'abord une transformation des coordonnées qui soit facile à inverser, conserve le caractère des équations et donne à la représentation analytique de l'hyperbole une forme plus maniable dans le calcul numérique :

On applique d'abord le changement de coordonnées

$$x = x^*, \quad y = y^* \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

qui transforme l'onde de Mach issue de l'origine,

$$y = \pm x \operatorname{tg} \alpha \quad \text{en} \quad y^* = \pm x^*$$

et l'onde de choc,

$$x^2 - \frac{y^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = a^2 \quad \text{en} \quad x^{*2} - y^{*2} = a^2$$

Si l'on pose, ξ étant un paramètre, $x^{*2} - y^{*2} = \xi^2$, on obtient une famille d'hyperboles ayant les mêmes asymptotes et dont les trajectoires orthogonales sont données par

$$y^* \cdot x^* = \eta$$

où η est un deuxième paramètre, indépendant de ξ .

On adopte ξ et η comme nouvelles coordonnées, ce qui donne

$$x^* = \pm \sqrt{\frac{\xi^2}{2} + \sqrt{\frac{\xi^4}{4} + \eta^2}},$$

$$y^* = \pm \frac{\eta}{\sqrt{\frac{\xi^2}{2} + \sqrt{\frac{\xi^4}{4} + \eta^2}}},$$

et

$$\xi = \sqrt{x^{*2} - y^{*2}},$$

$$\eta = x^* \cdot y^*$$

ou bien, dans les anciennes coordonnées et compte tenu du fait que $x > 0$ (la partie de l'écoulement en amont de l'onde de choc étant sans intérêt) :

$$x = \xi \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{\eta}{\xi^2}\right)^2}},$$

$$y = \frac{\eta \operatorname{tg} \alpha}{\xi \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{\eta}{\xi^2}\right)^2}}},$$

$$\xi = \sqrt{x^2 - \frac{y^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha}},$$

$$\eta = \frac{xy}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Avec les variables ξ et η , la région de l'écoulement en aval de l'onde de choc est caractérisée par $\xi \geq a$ et $-\infty < \eta < +\infty$; de plus, on a $y = 0 \Leftrightarrow \eta = 0$.

Autrement dit, la région en aval du choc se transforme dans le demi-plan $\xi \geq a$, l'écoulement ayant $\eta = 0$ comme axe de symétrie. L'onde de choc elle-même correspond à $\xi = a$. Sur cette ligne de départ on connaît u , v , i et p .

Il n'y aura pas de confusion à craindre quand nous désignerons, par la suite, les fonctions $u(x, y)$, $v(x, y)$, $i(x, y)$ et $p(x, y)$ considérées comme fonctions des nouvelles variables ξ et η par $u(\xi, \eta)$, $v(\xi, \eta)$, $i(\xi, \eta)$ et $p(\xi, \eta)$ avec la convention, bien entendu, que

$$u[\xi(x_0, y_0), \eta(x_0, y_0)] = u(x_0, y_0)$$

etc.... Ceci établi, on vérifie facilement les formules suivantes :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \xi} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{\eta}{\xi^2}\right)^2}} + \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\eta}{\xi \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{\eta}{\xi^2}\right)^2}}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial \xi} \cdot \frac{\eta}{\xi^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{\eta}{\xi^2}\right)^2}}} + \frac{\partial F}{\partial \eta} \cdot \frac{\xi}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{\eta}{\xi^2}\right)^2}}$$

D'autre part, on peut tirer de $\rho = \frac{c_p p}{r \cdot i}$ et $\mu = \mu_0 \frac{i_0 + c_p C}{i + c_p C} \left(\frac{i}{i_0}\right)^{\frac{1}{2}}$ avec ψ représentant, au choix, ξ ou η , les formules :

$$\rho_\psi = \frac{c_p}{r i} p_\psi - \frac{c_p p}{r \cdot i^2} i_\psi = \frac{\rho}{p} p_\psi - \frac{\rho}{i} i_\psi$$

$$\mu_\psi = -\frac{\mu}{i + c_p C} i_\psi + \frac{3}{2i} \mu i_\psi = \mu \frac{i + 3 c_p C}{2 i (i + c_p C)} i_\psi$$

de façon que le système page 92 se transforme, avec les abréviations

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \beta; \quad \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{\eta}{\xi^2}\right)^2} = A\left(\frac{\eta}{\xi^2}\right) = A;$$

$$\frac{1}{2} + A\left(\frac{\eta}{\xi^2}\right) = B\left(\frac{\eta}{\xi^2}\right) = B; \quad \frac{1}{A\left(\frac{\eta}{\xi^2}\right)} = D\left(\frac{\eta}{\xi^2}\right) = D; \quad \frac{1}{B\left(\frac{\eta}{\xi^2}\right)} = G\left(\frac{\eta}{\xi^2}\right) = G;$$

$$D\left(\frac{\eta}{\xi^2}\right) \cdot G\left(\frac{\eta}{\xi^2}\right) = E\left(\frac{\eta}{\xi^2}\right) = E; \quad E\left(\frac{\eta}{\xi^2}\right) \cdot G\left(\frac{\eta}{\xi^2}\right) = H\left(\frac{\eta}{\xi^2}\right) = H$$

dans :

$$\frac{\rho}{p} (\sqrt{B} \cdot u - \beta \cdot \frac{\eta}{\xi^2} \cdot \sqrt{G} \cdot v) p_\xi - \frac{\rho}{i} (\sqrt{B} \cdot u - \beta \cdot \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} \cdot v) i_\xi + \rho \sqrt{B} \cdot u_\xi - \rho \beta \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} v_\xi =$$

$$= -\frac{\rho}{p} \xi \left(\beta \sqrt{B} v + \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} u \right) p_\eta + \frac{\rho}{i} \xi \left(\beta \sqrt{B} v + \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} u \right) i_\eta - \rho \xi \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} u_\eta - \rho \beta \xi \sqrt{B} v_\eta$$

(équation de continuité)

$$\rho \sqrt{B} u u_\xi + \rho \xi \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} u u_\eta - \beta \rho \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} v u_\xi + \beta \rho \xi \sqrt{B} v u_\eta + \sqrt{B} p_\xi + \xi \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} p_\eta =$$

$$= \frac{4}{3} \mu B \frac{i + 3 c_p C}{2 i (i + c_p C)} i_\xi u_\xi + \frac{4}{3} \mu \xi \frac{\eta}{\xi^2} \frac{i + 3 c_p C}{2 i (i + c_p C)} i_\xi u_\eta + \frac{4}{3} \mu \xi \frac{\eta}{\xi^2} \frac{i + 3 c_p C}{2 i (i + c_p C)} i_\eta u_\xi +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{4}{3} \mu \xi^2 \frac{\eta^2}{\xi^4} G \frac{i+3c_p C}{2(i+c_p C)} i_\eta u_\eta + \frac{4}{3} \mu B u_{\xi\xi} + \frac{4}{3} \mu \xi^2 \frac{\eta^2}{\xi^4} G u_{\eta\eta} + \frac{8}{3} \mu \xi \frac{\eta}{\xi^2} u_{\xi\eta} + \\
 & + \frac{4}{3} \mu \frac{\eta^2}{\xi^4} \left(\frac{1}{2} E - D \right) u_\xi - \frac{4}{3} \mu \frac{\eta}{\xi^2} \left[\left(1 - G \right) - \frac{\eta^2}{\xi^4} \left(E - \frac{1}{2} H \right) \right] u_\eta + \frac{2}{3} \beta \mu \frac{\eta}{\xi^2} \frac{i+3c_p C}{2(i+c_p C)} i_\xi v_\xi - \\
 & - \frac{2}{3} \beta \mu \xi B \frac{i+3c_p C}{2(i+c_p C)} i_\xi v_\eta + \frac{2}{3} \beta \mu \xi \frac{\eta^2}{\xi^4} G \frac{i+3c_p C}{2(i+c_p C)} i_\eta v_\xi - \frac{2}{3} \beta \mu \xi^2 \frac{\eta}{\xi^2} \frac{i+3c_p C}{2(i+c_p C)} i_\eta v_\eta + \\
 & + \frac{2}{3} \beta \mu \frac{\eta}{\xi^2} v_{\xi\xi} - \frac{2}{3} \beta \mu \xi^2 \frac{\eta}{\xi^2} v_{\eta\eta} - \frac{2}{3} \beta \mu \xi \left(B - \frac{\eta^2}{\xi^4} G \right) v_{\xi\eta} - \frac{2}{3} \beta \mu \xi \frac{\eta^2}{\xi^4} \left[\left(2 - G \right) - \frac{\eta^2}{\xi^4} \left(E - \frac{1}{2} H \right) \right] v_\xi - \\
 & - \frac{2}{3} \beta \mu \left[B - \frac{\eta^2}{\xi^4} \left(D - \frac{1}{2} E \right) \right] v_\eta - \beta \mu \frac{\eta}{\xi^2} \frac{i+3c_p C}{2(i+c_p C)} i_\xi v_\xi - \beta \mu \xi \frac{\eta^2}{\xi^4} G \frac{i+3c_p C}{2(i+c_p C)} i_\xi v_\eta + \\
 & + \beta^2 \mu \frac{\eta^2}{\xi^4} G \frac{i+3c_p C}{2(i+c_p C)} i_\xi u_\xi - \beta^2 \mu \xi \frac{\eta}{\xi^2} \frac{i+3c_p C}{2(i+c_p C)} i_\xi u_\eta - \beta^2 \mu \xi \frac{\eta}{\xi^2} \frac{i+3c_p C}{2(i+c_p C)} i_\eta u_\xi + \\
 & + \beta^2 \mu \xi^2 B \frac{i+3c_p C}{2(i+c_p C)} i_\eta u_\eta + \beta \mu \xi B \frac{i+3c_p C}{2(i+c_p C)} i_\eta v_\xi + \beta \mu \xi^2 \frac{\eta}{\xi^2} \frac{i+3c_p C}{2(i+c_p C)} i_\eta v_\eta + \\
 & + \beta^2 \mu \frac{\eta^2}{\xi^4} G u_{\xi\xi} - \beta \mu \frac{\eta}{\xi^2} v_{\xi\xi} + \beta^2 \mu \xi^2 B u_{\eta\eta} + \beta \mu \xi^2 \frac{\eta}{\xi^2} v_{\eta\eta} - 2 \beta^2 \mu \xi \frac{\eta}{\xi^2} u_{\xi\eta} + \\
 & + \beta \mu \xi \left(B - \frac{\eta^2}{\xi^4} G \right) v_{\xi\eta} + \beta \mu \xi \frac{\eta^2}{\xi^4} \left(\frac{1}{2} D + \frac{\eta^2}{\xi^4} E \right) v_\xi - \beta^2 \mu \frac{1}{\xi} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \frac{\eta^2}{\xi^4} E \right) + \frac{\eta^2}{\xi^4} \left(2G - \frac{\eta^2}{\xi^4} H \right) \right] u_\xi - \\
 & - \beta^2 \mu \frac{\eta}{\xi^2} \left[\left(1 - \frac{1}{2} D \right) - \frac{\eta^2}{\xi^4} E \right] u_\eta + \beta \mu \left[\left(1 - \frac{1}{2} \frac{\eta^2}{\xi^4} E \right) + \frac{\eta^2}{\xi^4} \left(G - \frac{\eta^2}{\xi^4} H \right) \right] v_\eta
 \end{aligned}$$

(première équation du mouvement)

$$\begin{aligned}
 & \rho \sqrt{B} u v_\xi + \rho \xi \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} u v_\eta - \beta \rho \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} v v_\xi + \beta \rho \xi \sqrt{B} v v_\eta - \beta \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} p_\xi + \beta \xi \sqrt{B} p_\eta = \\
 & = \frac{2}{3} \beta \mu \frac{\eta}{\xi^2} \frac{i+3c_p C}{2(i+c_p C)} i_\xi u_\xi + \frac{2}{3} \beta \mu \xi \frac{\eta^2}{\xi^4} G \frac{i+3c_p C}{2(i+c_p C)} i_\xi u_\eta + \frac{4}{3} \beta^2 \mu \frac{\eta^2}{\xi^4} G \frac{i+3c_p C}{2(i+c_p C)} i_\xi v_\xi - \\
 & - \frac{4}{3} \beta^2 \mu \xi \frac{\eta}{\xi^2} \frac{i+3c_p C}{2(i+c_p C)} i_\xi v_\eta - \frac{2}{3} \beta \mu \xi B \frac{i+3c_p C}{2(i+c_p C)} i_\eta u_\xi - \frac{2}{3} \beta \mu \xi^2 \frac{\eta}{\xi^2} \frac{i+3c_p C}{2(i+c_p C)} i_\eta u_\eta - \\
 & - \frac{4}{3} \beta^2 \mu \xi \frac{\eta}{\xi^2} \frac{i+3c_p C}{2(i+c_p C)} i_\eta v_\xi + \frac{4}{3} \beta^2 \mu \xi^2 B \frac{i+3c_p C}{2(i+c_p C)} i_\eta v_\eta + \frac{2}{3} \beta \mu \frac{\eta}{\xi^2} u_{\xi\xi} + \frac{4}{3} \beta^2 \mu \frac{\eta^2}{\xi^4} G v_{\xi\xi} - \\
 & - \frac{2}{3} \beta \mu \xi^2 \frac{\eta}{\xi^2} u_{\eta\eta} + \frac{4}{3} \beta^2 \mu \xi^2 B v_{\eta\eta} - \frac{2}{3} \beta \mu \xi \left(B - \frac{\eta^2}{\xi^4} G \right) u_{\xi\eta} - \frac{8}{3} \beta^2 \mu \xi \frac{\eta}{\xi^2} v_{\xi\eta} - \\
 & - \frac{2}{3} \beta \mu \xi^{-1} \frac{\eta}{\xi^2} \left(\frac{1}{2} D + \frac{\eta^2}{\xi^4} E \right) u_\xi + \frac{4}{3} \beta^2 \mu \xi^{-1} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \frac{\eta^2}{\xi^4} E \right) + \frac{\eta^2}{\xi^4} \left(2G - \frac{\eta^2}{\xi^4} H \right) \right] v_\xi - \\
 & - \frac{2}{3} \beta \mu \left[\left(1 - \frac{1}{2} \frac{\eta^2}{\xi^4} E \right) + \frac{\eta^2}{\xi^4} \left(G - \frac{\eta^2}{\xi^4} H \right) \right] u_\eta - \frac{4}{3} \beta^2 \mu \frac{\eta}{\xi^2} \left[\left(1 - \frac{1}{2} D \right) - \frac{\eta^2}{\xi^4} E \right] v_\eta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\beta \mu \frac{\eta}{\xi^2} \frac{i+3c_p C}{2i(i+c_p C)} i_\xi u_\xi + \beta \mu \xi B \frac{i+3c_p C}{2i(i+c_p C)} i_\xi u_\eta + \mu B \frac{i+3c_p C}{2i(i+c_p C)} i_\xi v_\xi + \\
 & + \mu \xi \frac{\eta}{\xi^2} \frac{i+3c_p C}{2i(i+c_p C)} i_\xi v_\eta - \beta \mu \xi \frac{\eta^2}{\xi^4} G \frac{i+3c_p C}{2i(i+c_p C)} i_\eta u_\xi + \beta \mu \xi^2 \frac{\eta}{\xi^2} \frac{i+3c_p C}{2i(i+c_p C)} i_\eta u_\eta + \\
 & + \mu \xi \frac{\eta}{\xi^2} \frac{i+3c_p C}{2i(i+c_p C)} i_\eta v_\xi + \mu \xi^2 \frac{\eta^2}{\xi^4} G \frac{i+3c_p C}{2i(i+c_p C)} i_\eta v_\eta - \beta \mu \frac{\eta}{\xi^2} u_{\xi\xi} + \mu B v_{\xi\xi} + \beta \mu \xi^2 \frac{\eta}{\xi^2} u_{\eta\eta} + \\
 & + \mu \xi^2 \frac{\eta^2}{\xi^4} G v_{\eta\eta} + \beta \mu \xi \left(B - \frac{\eta^2}{\xi^4} G \right) u_{\xi\eta} + 2 \mu \xi \frac{\eta}{\xi^2} v_{\xi\eta} + \beta \mu \xi^{-1} \frac{\eta^2}{\xi^2} \left[(2-G) - \frac{\eta^2}{\xi^4} \left(E - \frac{1}{2} H \right) \right] u_\xi + \\
 & + \mu \xi^{-1} \frac{\eta^2}{\xi^4} \left(\frac{1}{2} E - D \right) v_\xi + \beta \mu \left[B - \frac{\eta^2}{\xi^4} \left(D - \frac{1}{2} E \right) \right] u_\eta - \mu \frac{\eta}{\xi^2} \left[(1-G) - \frac{\eta^2}{\xi^4} \left(E - \frac{1}{2} H \right) \right] v_\eta
 \end{aligned}$$

(deuxième équation du mouvement)

$$\begin{aligned}
 & \rho \sqrt{B} u i_\xi + \rho \xi \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} u i_\eta - \beta \rho \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} v i_\xi + \beta \rho \xi \sqrt{B} v i_\eta - \sqrt{B} u p_\xi - \\
 & - \frac{\eta}{\xi^2} \xi \sqrt{G} u p_\eta + \beta \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} v p_\xi - \beta \xi \sqrt{B} v p_\eta = \\
 & = \frac{4}{3} \mu B u_\xi^2 + \frac{4}{3} \mu \xi^2 \frac{\eta^2}{\xi^4} G u_\eta^2 + \frac{8}{3} \mu \xi \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{BG} u_\xi u_\eta + \frac{4}{3} \beta^2 \mu \frac{\eta^2}{\xi^4} G v_\xi^2 + \frac{4}{3} \beta^2 \mu \xi^2 B v_\eta^2 - \\
 & - \frac{8}{3} \beta^2 \mu \xi \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{BG} v_\xi v_\eta + \frac{4}{3} \beta \mu \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{BG} u_\xi v_\xi - \frac{4}{3} \beta \mu \xi B u_\xi v_\eta + \frac{4}{3} \beta \mu \xi \frac{\eta^2}{\xi^4} G v_\xi u_\eta - \\
 & - \frac{4}{3} \beta \mu \xi^2 \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{BG} u_\eta v_\eta + \beta^2 \mu \frac{\eta^2}{\xi^4} G u_\xi^2 + \beta^2 \mu \xi^2 B u_\eta^2 - 2 \beta^2 \mu \xi \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{BG} u_\eta u_\xi + \\
 & + \mu B v_\xi^2 + \mu \xi^2 \frac{\eta^2}{\xi^4} G v_\eta^2 + 2 \mu \xi \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{BG} v_\eta v_\xi - 2 \beta \mu \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{BG} u_\xi v_\xi + 2 \beta \mu \xi B u_\eta v_\xi - \\
 & - 2 \beta \mu \xi \frac{\eta^2}{\xi^4} G v_\eta u_\xi + 2 \beta \mu \xi^2 \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{BG} u_\eta v_\eta + \frac{1}{\mathfrak{L}} \mu B \frac{i+3c_p C}{2i(i+c_p C)} i_\xi^2 + \frac{2}{\mathfrak{L}} \mu \xi \frac{\eta}{\xi^2} \frac{i+3c_p C}{2i(i+c_p C)} i_\eta i_\xi + \\
 & + \frac{1}{\mathfrak{L}} \mu \xi^2 \frac{\eta^2}{\xi^4} G \frac{i+3c_p C}{2i(i+c_p C)} i_\eta^2 + \frac{1}{\mathfrak{L}} \mu B i_{\xi\xi} + \frac{1}{\mathfrak{L}} \mu \xi^2 \frac{\eta^2}{\xi^4} G i_{\eta\eta} + \frac{2}{\mathfrak{L}} \mu \xi \frac{\eta}{\xi^2} i_{\xi\eta} + \\
 & + \frac{1}{\mathfrak{L}} \mu \xi^{-1} \frac{\eta^2}{\xi^4} \left(\frac{1}{2} E - D \right) i_\xi - \frac{1}{\mathfrak{L}} \mu \frac{\eta}{\xi^2} \left[(1-G) - \frac{\eta^2}{\xi^4} \left(E - \frac{1}{2} H \right) \right] i_\eta + \\
 & + \frac{1}{\mathfrak{L}} \beta^2 \mu \frac{\eta^2}{\xi^4} G \frac{i+3c_p C}{2i(i+c_p C)} i_\xi^2 - \frac{2}{\mathfrak{L}} \beta^2 \mu \xi \frac{\eta}{\xi^2} \frac{i+3c_p C}{2i(i+c_p C)} i_\eta i_\xi + \frac{1}{\mathfrak{L}} \beta^2 \mu \xi^2 B \frac{i+3c_p C}{2i(i+c_p C)} i_\eta^2 + \\
 & + \frac{1}{\mathfrak{L}} \beta^2 \mu \frac{\eta^2}{\xi^4} G i_{\xi\xi} + \frac{1}{\mathfrak{L}} \beta^2 \mu \xi^2 B i_{\eta\eta} - \frac{2}{\mathfrak{L}} \beta^2 \mu \xi \frac{\eta}{\xi^2} i_{\xi\eta} - \\
 & - \frac{1}{\mathfrak{L}} \beta^2 \mu \xi^{-1} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \frac{\eta^2}{\xi^4} E \right) + \frac{\eta^2}{\xi^4} \left(2G - \frac{\eta^2}{\xi^4} H \right) \right] i_\xi - \frac{1}{\mathfrak{L}} \beta^2 \mu \frac{\eta}{\xi^2} \left[\left(1 - \frac{1}{2} D \right) - \frac{\eta^2}{\xi^4} E \right] i_\eta.
 \end{aligned}$$

(équation de l'énergie)

4. Si le système ainsi transformé est plus "touffu" que le système primitif, il présente toutefois sur lui, pour le calcul numérique, un grand avantage : il permet d'introduire dans le plan (ξ, η) un réseau de mailles rectangulaires dont les dimensions de base (petites) sont k suivant ξ et h suivant η .

Les fonctions u, v, i, p sont connues dans une bande contiguë à l'onde de choc; si l'on passe au plan (ξ, η) , elles le sont dans une bande $a \leq \xi \leq a + k$.

Nous pouvons donc supposer, pour le calcul des inconnues u, v, i, p sur une droite $\xi = a + (n+1)k$, ces fonctions déjà déterminées sur les droites précédentes $\xi = a, \xi = a + k, \dots, \xi = a + nk$, avec $n \geq 1$.

En même temps que u, v, i, p sont définies également $u_\eta, v_\eta, i_\eta, p_\eta$ sur les mêmes droites, mais on ne connaît $u_\xi, v_\xi, i_\xi, p_\xi$ que sur les droites $\xi = a, \xi = a + k, \dots, \xi = a + (n-1)k$.

Au lieu de chercher u, v, i, p sur $\xi = a + (n+1)k$, nous nous proposons de calculer $u_\xi, v_\xi, i_\xi, p_\xi$ sur $\xi = a + nk$.

Une fois ces valeurs trouvées, nous obtenons :

$$\begin{aligned} u(a + (n+1)k) &= u(a + nk) + k u_\xi(a + nk), \\ v(a + (n+1)k) &= v(a + nk) + k v_\xi(a + nk), \text{ etc.} \end{aligned}$$

Cette nouvelle interprétation se traduit pour le système transformé par le choix de $u_\xi, v_\xi, i_\xi, p_\xi$ comme inconnues, les autres grandeurs y figurant pouvant être considérées comme connues.

On voit immédiatement que, pour chaque valeur de η sur la droite $a + nk = \xi$, l'équation de continuité transformée est linéaire en $u_\xi, v_\xi, i_\xi, p_\xi$.

Dans les deux équations du mouvement, on rencontre, en plus des termes du premier degré en u_ξ, v_ξ, i_ξ et p_ξ , des expressions contenant $i_\xi u_\xi, i_\xi v_\xi, u_{\xi\xi}, v_{\xi\xi}, u_{\xi\eta}$ et $v_{\xi\eta}$.

Pour obtenir une solution de première approximation de ces équations, à partir d'équations linéaires par rapport aux inconnues, on applique un procédé d'itérations. En effet, la variation de i avec ξ sera faible par rapport à celle de u et v ; c'est pourquoi, dans les produits $i_\xi u_\xi$ et $i_\xi v_\xi$, on considère u_ξ et v_ξ comme inconnues, tout en remplaçant i_ξ par la valeur correspondante sur la ligne précédente, $\xi = a + (n-1)k$.

Si l'on désigne cette valeur approchée de i_ξ par i_ξ^* , on a, dans les équations du mouvement, au lieu de $i_\xi u_\xi$ et $i_\xi v_\xi$, les expressions $i_\xi^* u_\xi$ et $i_\xi^* v_\xi$, linéaires par rapport aux inconnues. On exprime ensuite, comme c'est l'habitude dans les procédés aux différences finies, $u_{\xi\xi}$ par $\frac{u_\xi - u_\xi^*}{k}$, $v_{\xi\xi}$ par $\frac{v_\xi - v_\xi^*}{k}$, où u_ξ^* et v_ξ^* désignent les valeurs de u_ξ et v_ξ sur la droite $\xi = a + (n-1)k$.

Restent encore les dérivées mixtes de forme $u_{\xi\eta}$ et $v_{\xi\eta}$ que l'on remplacera par $\frac{u_\eta - u_\eta^*}{k}$ et $\frac{v_\eta - v_\eta^*}{k}$ respectivement.

Si l'on a calculé, à l'aide de l'équation de l'énergie (on verra plus loin comment), une première approximation $u_\xi^{(1)}, v_\xi^{(1)}, i_\xi^{(1)}, p_\xi^{(1)}$, des inconnues, on établira les produits $i_\xi u_\xi$ et $i_\xi v_\xi$ sous la forme $i_\xi^{(1)} u_\xi^{(1)}$ et $i_\xi^{(1)} v_\xi^{(1)}$; de plus, on remplace $u_{\xi\eta}$ par

$$u_{\xi\eta}^{(1)} = \frac{u_\eta^{(1)}(\eta + h) - u_\eta^{(1)}(\eta - h)}{2h}, \quad v_{\xi\eta}^{(1)} \text{ par } v_{\xi\eta}^{(1)} = \frac{v_\eta^{(1)}(\eta + h) - v_\eta^{(1)}(\eta - h)}{2h},$$

approximations d'un degré supérieur. Les expressions pour $u_{\xi\xi}$ et $v_{\xi\xi}$ ne subissent aucun

changement. On calcule ainsi une deuxième approximation $u_\xi^{(2)}, v_\xi^{(2)}, i_\xi^{(2)}, p_\xi^{(2)}$, et on continue

jusqu'à ce que $u_\xi^{(N-1)} \approx u_\xi^{(N)}, v_\xi^{(N-1)} \approx v_\xi^{(N)}, i_\xi^{(N-1)} \approx i_\xi^{(N)}, p_\xi^{(N-1)} \approx p_\xi^{(N)}$, dans les limites de la précision du calcul, qui dépend des grandeurs des mailles k et h choisies.

Pour écrire l'équation de continuité et les équations du mouvement sous leur nouvelle forme, on utilisera les notations suivantes :

$u_{\xi}^{(N)}, v_{\xi}^{(N)}, i_{\xi}^{(N)}, p_{\xi}^{(N)}$ désignent les inconnues à la $N^{\text{ième}}$ itération ($N \geq 1$), les valeurs $u_{\xi}^{(N-1)}, v_{\xi}^{(N-1)}, i_{\xi}^{(N-1)}, p_{\xi}^{(N-1)}$ $u_{\xi}^{(N-2)}, v_{\xi}^{(N-2)}, \dots$ etc étant données par une itération antérieure et considérées comme connues. Tou-

tefois, on fait la convention que $u_{\xi}^{(0)} = u_{\xi}^*, v_{\xi}^{(0)} = v_{\xi}^*, i_{\xi}^{(0)} = i_{\xi}^*, p_{\xi}^{(0)} = p_{\xi}^*$. De même, on aura

$$u_{\xi\eta}^{(N-1)} = \frac{u_{\xi}^{(N-1)}(\eta + h) - u_{\xi}^{(N-1)}(\eta - h)}{2h} \text{ pour } N - 1 > 0, \quad u_{\xi\eta}^{(0)} = \frac{u_{\eta} - u_{\eta}^*}{k},$$

avec des définitions analogues pour $v_{\xi\eta}^{(N-1)}$ etc On pose toujours $u_{\xi\xi} = \frac{u_{\xi} - u_{\xi}^*}{k}$ etc

Les trois premières équations (continuité et mouvement) se trouvent ainsi transformées en un système d'équations à approximations successives, linéaires en $u_{\xi}^{(N)}, v_{\xi}^{(N)}, i_{\xi}^{(N)}, p_{\xi}^{(N)}$, système qui, après groupement des termes analogues, se présente ainsi :

$$\rho \left(\sqrt{B} u - \beta \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} v \right) \cdot \left[\frac{1}{p} p_{\xi}^{(N)} - \frac{1}{i} i_{\xi}^{(N)} \right] + \rho \sqrt{B} u_{\xi}^{(N)} - \beta \rho \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} v_{\xi}^{(N)} =$$

$$= - \rho \xi \left(\beta \sqrt{B} v + \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} u \right) \left[\frac{1}{p} p_{\eta} - \frac{1}{i} i_{\eta} \right] - \rho \xi \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} u_{\eta} - \beta \rho \xi \sqrt{B} v_{\eta}$$

(équation de continuité)

$$\sqrt{B} p_{\xi}^{(N)} - \mu \left[\left(\frac{4}{3} - \beta^2 \right) \xi \frac{\eta}{\xi^2} u_{\eta} - \beta \xi \left(\frac{2}{3} B + \frac{\eta^2}{\xi^4} G \right) v_{\eta} \right] \frac{i + 3 c_p C}{2 i (i + c_p C)} i_{\xi}^{(N)} +$$

$$+ \left[\rho \sqrt{B} u - \beta \rho \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} v + \beta^2 \mu \xi^{-1} + \mu \xi^{-1} \frac{\eta^2}{\xi^4} \left(2 \beta^2 G - \beta^2 \frac{\eta^2}{\xi^4} H - \frac{1}{2} \beta^2 E - \frac{2}{3} E + \frac{4}{3} D \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{4}{3} - \beta^2 \right) \mu \xi \frac{\eta}{\xi^2} \frac{i + 3 c_p C}{2 i (i + c_p C)} i_{\eta} - \mu \left(\frac{4}{3} B + \beta^2 \frac{\eta^2}{\xi^4} G \right) \frac{i + 3 c_p C}{2 i (i + c_p C)} i_{\xi}^{(N-1)} - \frac{1}{k} \mu \left(\frac{4}{3} B + \beta^2 \frac{\eta^2}{\xi^4} G \right) \right] u_{\xi}^{(N)} +$$

$$+ \left[\frac{2}{3} \beta \mu \xi^{-1} \frac{\eta}{\xi^2} \left(2 - G - \frac{3}{4} D \right) - \frac{1}{3} \beta \mu \xi^{-1} \frac{\eta^3}{\xi^6} (5E - H) - \beta \mu \xi \left(B + \frac{2}{3} \frac{\eta^2}{\xi^4} G \right) \frac{i + 3 c_p C}{2 i (i + c_p C)} i_{\eta} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3} \beta \mu \frac{\eta}{\xi^2} \frac{i + 3 c_p C}{2 i (i + c_p C)} i_{\xi}^{(N-1)} + \frac{1}{3k} \beta \mu \frac{\eta}{\xi^2} \right] v_{\xi}^{(N)} =$$

$$= - \left[\rho \xi \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} u + \beta \rho \xi \sqrt{B} v + \mu \frac{\eta}{\xi^2} \left\{ \left(\frac{4}{3} + \beta^2 \right) \left(1 - \frac{\eta^2}{\xi^4} E \right) + \frac{2}{3} \frac{\eta^2}{\xi^4} H - \frac{4}{3} G - \frac{1}{2} \beta^2 D \right\} \right] u_{\eta} +$$

$$+ \beta \mu \left[1 - \frac{2}{3} B + \frac{\eta^2}{\xi^4} \left(G + \frac{2}{3} D - \frac{5}{6} E \right) - \frac{\eta^4}{\xi^8} H \right] \cdot v_{\eta} +$$

$$+ \mu \xi^2 \left(\frac{4}{3} \frac{\eta^2}{\xi^4} G + \beta^2 B \right) \frac{i + 3 c_p C}{2 i (i + c_p C)} i_{\eta} u_{\eta} + \frac{1}{3} \beta \mu \eta \frac{i + 3 c_p C}{2 i (i + c_p C)} i_{\eta} v_{\eta} -$$

$$- \frac{1}{k} \mu \left(\frac{4}{3} B + \beta^2 \frac{\eta^2}{\xi^4} G \right) u_{\xi}^* + \frac{1}{3k} \beta \mu \frac{\eta}{\xi^2} v_{\xi}^* + \mu \xi^2 \left(\beta^2 B + \frac{4}{3} \frac{\eta^2}{\xi^4} G \right) u_{\eta\eta} +$$

$$+ \frac{1}{3} \beta \mu \eta v_{\eta\eta} + 2 \left(\frac{4}{3} - \beta^2 \right) \mu \xi \frac{\eta}{\xi^2} u_{\xi\eta}^{(N-1)} + \frac{1}{3} \beta \mu \xi \left(B - \frac{\eta^2}{\xi^4} G \right) v_{\xi\eta}^{(N-1)} - \xi \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} p_{\eta}$$

(première équation du mouvement)

$$\begin{aligned}
 & -\beta \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} p_{\xi}^{(N)} - \mu \left[\beta \xi \left(B + \frac{2}{3} \frac{\eta^2}{\xi^4} G \right) u_{\eta} - \left(\frac{4}{3} \beta^2 - 1 \right) \xi \frac{\eta}{\xi^2} v_{\eta} \right] \frac{i + 3 c_p C}{2 i (i + c_p C)} i_{\xi}^{(N)} + \\
 & + \beta \mu \xi^{-1} \left[\frac{\eta}{\xi^2} \left(G - 2 + \frac{1}{3} D \right) + \frac{1}{3} \frac{\eta^3}{\xi^6} \left(5 E - \frac{3}{2} H \right) + \xi^2 \left(\frac{2}{3} B + \frac{\eta^2}{\xi^4} G \right) \frac{i + 3 c_p C}{2 i (i + c_p C)} i_{\eta} + \frac{1}{3 k} \frac{\eta}{\xi^2} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{3} \frac{\eta}{\xi^2} \frac{i + 3 c_p C}{2 i (i + c_p C)} i_{\xi}^{(N-1)} \right] u_{\xi} + \left[\rho \sqrt{B} u - \beta \rho \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} v + \frac{4}{3} \beta^2 \mu \xi^{-1} + \right. \\
 & \quad \left. + \mu \xi^{-1} \frac{\eta^2}{\xi^4} \left\{ \frac{8}{3} \beta^2 G + D - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \beta^2 + 1 \right) E - \frac{4}{3} \beta^2 \frac{\eta^2}{\xi^4} H \right\} - \left(1 - \frac{4}{3} \beta^2 \right) \mu \xi \frac{\eta}{\xi^2} \frac{i + 3 c_p C}{2 i (i + c_p C)} i_{\eta} - \right. \\
 & \quad \left. - \mu \left(\frac{4}{3} \beta^2 \frac{\eta^2}{\xi^4} G + B \right) \frac{i + 3 c_p C}{2 i (i + c_p C)} i_{\xi}^{(N-1)} - \frac{1}{k} \mu \left(\frac{4}{3} \beta^2 \frac{\eta^2}{\xi^4} G + B \right) \right] v_{\xi} = \\
 & = \beta \mu \left[B - \frac{2}{3} + \frac{\eta^2}{\xi^4} \left(\frac{5}{6} E - D - \frac{2}{3} G \right) + \frac{2}{3} \frac{\eta^4}{\xi^8} H \right] u_{\eta} - \\
 & - \left[\rho \xi \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} u + \beta \rho \xi \sqrt{B} v + \mu \frac{\eta}{\xi^2} \left\{ \left(\frac{4}{3} \beta^2 + 1 \right) \left(1 - \frac{\eta^2}{\xi^4} E \right) + \frac{1}{2} \frac{\eta^2}{\xi^4} H - G - \frac{2}{3} \beta^2 D \right\} \right] v_{\eta} + \\
 & + \frac{1}{3} \beta \mu \eta \frac{i + 3 c_p C}{2 i (i + c_p C)} i_{\eta} u_{\eta} + \mu \xi^2 \left(\frac{4}{3} \beta^2 B + \frac{\eta^2}{\xi^4} G \right) \frac{i + 3 c_p C}{2 i (i + c_p C)} i_{\eta} v_{\eta} + \frac{1}{3 k} \beta \mu \frac{\eta}{\xi^2} u_{\xi}^* - \\
 & - \frac{1}{k} \mu \left(\frac{4}{3} \beta^2 \frac{\eta^2}{\xi^4} G + B \right) v_{\xi}^* + \frac{1}{3} \beta \mu \eta u_{\eta \eta} + \mu \xi^2 \left(\frac{4}{3} \beta^2 B + \frac{\eta^2}{\xi^4} G \right) v_{\eta \eta} + \\
 & + \frac{1}{3} \beta \mu \xi \left(B - \frac{\eta^2}{\xi^4} G \right) u_{\xi \eta}^{(N-1)} + 2 \left(1 - \frac{4}{3} \beta^2 \right) \mu \xi \frac{\eta}{\xi^2} v_{\xi \eta}^{(N-1)} - \beta \xi \sqrt{B} p_{\eta}
 \end{aligned}$$

(deuxième équation du mouvement)

5. Ces trois équations forment un système linéaire à quatre inconnues, dont trois peuvent être exprimées en fonction linéaire de l'une d'entre elles. La quatrième équation (celle de l'énergie) se distingue essentiellement des trois précédentes. En effet, sa signification physique et sa forme révèlent deux points importants :

α) La quatrième inconnue, i_{ξ} , y joue un rôle prépondérant, alors que sa présence dans les équations du mouvement avait un caractère accidentel : elle y était introduite seulement par le coefficient de viscosité μ et ses dérivées.

β) L'équation de continuité est linéaire par rapport aux quatre inconnues; les équations du mouvement ne le sont plus, mais ne comportent de termes de degré supérieur qu'incidemment, ce qui permet une linéarisation facile. Il n'en est pas de même pour la quatrième équation. Dans les termes $u_{\xi} v_{\xi}$, $u_{\xi}^2 = u_{\xi} u_{\xi}$, $v_{\xi}^2 = v_{\xi} v_{\xi}$, ... les deux facteurs sont de même importance. Il est donc impossible de linéariser l'équation de l'énergie. On conserve donc les termes quadra-

tiques. En définissant $i_{\xi \eta}^{(N-1)}$ d'une façon analogue à $u_{\xi \eta}^{(N-1)}$ et $v_{\xi \eta}^{(N-1)}$, et en remplaçant $i_{\xi \xi}$ par : $\frac{i_{\xi}^{(N)}}{k} - \frac{i_{\xi}^*}{k}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 & -\mu \left(\frac{4}{3} B + \beta^2 \frac{\eta^2}{\xi^4} G \right) u_{\eta}^{(N)} - \mu \left(B + \frac{4}{3} \beta^2 \frac{\eta^2}{\xi^4} G \right) v_{\xi}^{(N)} + \frac{2}{3} \beta \mu \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{B G} u_{\xi}^{(N)} v_{\xi}^{(N)} - \\
 & - \frac{1}{2} \mu \left(B + \beta^2 \frac{\eta^2}{\xi^4} G \right) \frac{i + 3 c_p C}{2 i (i + c_p C)} i_{\xi}^{(N)} + \mu \left[\left(2 \beta^2 - \frac{8}{3} \right) \xi \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{B G} u_{\eta} + \beta \xi \left(\frac{4}{3} B + 2 \frac{\eta^2}{\xi^4} G \right) v_{\eta} \right] u_{\xi}^{(N)} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\mu \left[\beta \xi \left(2B + \frac{4}{3} \frac{\eta^2}{\xi^4} G \right) u_\eta + \left(2 - \frac{8}{3} \beta^2 \right) \xi \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{BG} v_\eta \right] v_\xi^{(N)} - \left(\sqrt{B} u - \beta \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} v \right) p_\xi^{(N)} + \\
 & + \frac{1}{\mathfrak{L}} \mu \left[\frac{\rho}{\mu} \left(\sqrt{B} u - \beta \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} v \right) - 2(1 - \beta^2) \frac{i + 3c_p C}{2i(i + c_p C)} \xi \frac{\eta}{\xi^2} i_\eta - \frac{1}{k} \left(B + \beta^2 \frac{\eta^2}{\xi^4} G \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \xi^{-1} \left\{ \beta^2 + \left(2\beta^2 G - \frac{1}{2} \beta^2 E - \frac{1}{2} E + D \right) \frac{\eta^2}{\xi^4} - \beta^2 \frac{\eta^4}{\xi^8} H \right\} \right] \cdot i_\xi^{(N)} = \\
 & = \frac{2}{\mathfrak{L}} (1 - \beta^2) \mu \xi \frac{\eta}{\xi^2} i_{\xi\eta}^{(N-1)} - \frac{1}{\mathfrak{L}k} \mu \left(B + \beta^2 \frac{\eta^2}{\xi^4} G \right) i_\xi^* + \mu \xi^2 \left(\beta^2 B + \frac{4}{3} \frac{\eta^2}{\xi^4} G \right) u_\eta^2 + \\
 & + \mu \xi^2 \left(\frac{4}{3} \beta^2 B + \frac{\eta^2}{\xi^4} G \right) v_\eta^2 + \frac{2}{3} \beta \mu \eta \sqrt{BG} u_\eta v_\eta + \frac{1}{\mathfrak{L}} \mu \xi^2 \left(\beta^2 B + \frac{\eta^2}{\xi^4} G \right) \frac{i + 3c_p C}{2i(i + c_p C)} i_\eta^2 + \\
 & + \frac{1}{\mathfrak{L}} \mu \xi^2 \left(\beta^2 B + \frac{\eta^2}{\xi^4} G \right) i_{\eta\eta} + \xi \left(\frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} u + \beta \sqrt{B} v \right) p_\eta - \\
 & - \left[\rho \xi \left(\frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} u + \beta \sqrt{B} v \right) + \frac{1}{\mathfrak{L}} \mu \frac{\eta}{\xi^2} \left\{ (1 - G) + \beta^2 \left(1 - \frac{1}{2} D \right) \right\} - \frac{1}{\mathfrak{L}} \mu \frac{\eta^3}{\xi^6} \left(E - \frac{1}{2} H + \beta^2 E \right) \right] i_\eta
 \end{aligned}$$

(équation de l'énergie).

Etant donné la forme de cette équation et les constatations faites en α), on résoudra le système des trois équations linéarisées (continuité et mouvement) par rapport à $i_\xi^{(N)}$, ce qui conduit à trois expressions linéaires :

$$\begin{aligned}
 u_\xi^{(N)} &= U_1 + U_2 i_\xi^{(N)} \\
 v_\xi^{(N)} &= V_1 + V_2 i_\xi^{(N)} \\
 p_\xi^{(N)} &= P_1 + P_2 i_\xi^{(N)}
 \end{aligned}$$

dont l'introduction dans l'équation de l'énergie donne à celle-ci une forme quadratique avec $i_\xi^{(N)}$ comme seule inconnue :

$$J_1 i_\xi^{(N)2} + J_2 i_\xi^{(N)} + J_3 = 0$$

où J_1, J_2, J_3 sont des fonctions connues de ξ et η .

On obtient alors $i_\xi^{(N)} = -\frac{J_2}{2J_1} \pm \sqrt{\frac{J_2^2}{4J_1^2} - \frac{J_3}{J_1}}$, expression dans laquelle le signe de la racine

peut être déterminé par la continuité de $i_\xi^{(N)}$ avec $i_\xi^{(N-1)}$. Cette solution, introduite dans les expressions de u_ξ, v_ξ, p_ξ fournit alors les trois inconnues.

6. Cette solution de principe donne lieu, dans les cas dégénérés, à des considérations algébriques ou physiques supplémentaires; un essai numérique effectué dans un cas concret à l'Office National d'Etudes et de Recherches Aéronautiques, a cependant montré que le principe ici exposé conduit à un calcul viable.

En ce qui concerne les démonstrations de convergence, données dans le paragraphe 2 du chapitre III dans un cas pourtant encore relativement simple, il paraît peu probable que l'on puisse mener à bien une démonstration analogue dans le cas présent.

Nous esquissons, néanmoins, la marche d'une telle démonstration qui doit comprendre deux points essentiels :

- a) convergence de l'itération sur une ligne $\xi = \text{constante}$;
- b) convergence de la solution approchée, obtenue sur les lignes discrètes $\xi = a$, $\xi = a + k$, .. $\xi = a + nk$ etc., vers la solution exacte si $k \rightarrow 0$.

L'essentiel d'une réponse au point a) est contenu dans les observations α) et β) de la page 99 : En effet, les simplifications apportées au système des équations transformées à la suite du remplacement de $i_\xi u_\xi$ et $i_\xi v_\xi$ par $i_\xi^* u_\xi$ et $i_\xi^* v_\xi$ n'affectent que la deuxième et troisième de ces équations, et encore dans des termes d'importance secondaire.

La substitution de $\frac{u_\eta - u_\eta^*}{k}$, $\frac{v_\eta - v_\eta^*}{k}$, $\frac{i_\eta - i_\eta^*}{k}$ à $u_{\xi\eta}$, $v_{\xi\eta}$, $i_{\xi\eta}$, par contre, n'est même pas du ressort de l'itération proprement dite, mais concerne le point b), qui traite de l'exactitude de l'approximation de quotients différentiels par les quotients de différences correspondants. Si cette exactitude est suffisante, ce qui dépend du choix de k et de la validité de l'hypothèse de départ sur la non-viscosité du fluide immédiatement après l'onde de choc, les itérations suivantes, remplacement du $u_{\xi\eta}$ par $\frac{u_\xi^{(N-1)}(\eta + h) - u_\xi^{(N-1)}(\eta - h)}{2h}$ etc., constituent nécessairement une meilleure approximation à cause de la symétrie de $u_{\xi\eta}^{(N-1)}$ par rapport au point (ξ, η) considéré.

La réponse à b) dépend de la mesure dans laquelle il est effectivement possible de décrire l'état du fluide à proximité d'une onde de choc détachée par un système d'équations différentielles qui ne contiennent pas de termes de viscosité; cette hypothèse n'est pas du ressort des mathématiques, mais de l'expérience physique.

Il resterait à examiner l'effet de deux substitutions indéniablement incorrectes et la propagation de l'erreur qu'elles provoquent : Remplacement de $u_{\xi\xi}$ et $v_{\xi\xi}$ par leurs quotients de différences non symétriquement constitués, et formation de la nouvelle valeur (de u par exemple) à l'aide de $u^* + ku_\xi^*$. Le premier point peut être admis sans hésitation puisqu'il ne porte que sur un nombre réduit de termes multipliés par la fonction μ , toujours petite; la deuxième est une erreur de principe commune à toute solution numérique. La prudence dans le choix de k s'impose de toute façon.

7. Comme nous l'avons souligné à plusieurs reprises, la solution ici exposée exige la connaissance des valeurs de u , v , i , p et de leurs dérivées par rapport à ξ sur deux lignes consécutives $\xi = a + nk$, et celle des dérivées par rapport à ξ sur la première de ces lignes. Or, l'application des équations de l'onde de choc ne fournit les valeurs de u , v , p , i que sur la ligne de choc, et on dispose ainsi seulement de u , v , p , i et de leurs dérivées par rapport à η sur $\xi = a$.

D'autre part, l'hypothèse que l'onde de choc est détachée — qui d'après le paragraphe 2 peut être généralement admise — permet de négliger la viscosité pour $\xi \approx a$, si bien que dans le système transformé on peut considérer comme nuls tous les termes contenant μ et ses dérivées. On en déduit alors le système suivant :

$$\begin{aligned} & \rho \left(\sqrt{B} u - \beta \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} v \right) \left[\frac{1}{p} p_\xi - \frac{1}{i} i_\xi \right] + \rho \sqrt{B} u_\xi - \beta \rho \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} v_\xi = \\ & = -\rho \xi \left(\beta \sqrt{B} v + \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} u \right) \left[\frac{1}{p} p_\eta - \frac{1}{i} i_\eta \right] - \rho \xi \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} u_\eta - \beta \rho \xi \sqrt{B} v_\eta \end{aligned}$$

(équation de continuité)

$$\begin{aligned}\sqrt{B} p_{\xi} + \left(\rho \sqrt{B} u - \beta \rho \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} v \right) u_{\xi} &= - \left(\rho \xi \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} u + \beta \rho \xi \sqrt{B} v \right) u_{\eta} - \xi \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} p_{\eta} \\ - \beta \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} p_{\xi} + \left(\rho \sqrt{B} u - \beta \rho \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} v \right) v_{\xi} &= - \left(\rho \xi \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} u + \beta \rho \xi \sqrt{B} v \right) v_{\eta} - \beta \xi \sqrt{B} p_{\eta}\end{aligned}$$

(équations du mouvement)

$$\begin{aligned}\left(\rho \sqrt{B} u - \beta \rho \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} v \right) i_{\xi} - \left(\sqrt{B} u - \beta \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} v \right) p_{\xi} &= \\ = - \rho \left(\xi \frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} u + \beta \xi \sqrt{B} v \right) i_{\eta} + \xi \left(\frac{\eta}{\xi^2} \sqrt{G} u + \beta \sqrt{B} v \right) p_{\eta}\end{aligned}$$

(équation de l'énergie)

Ce système est formé de quatre équations, linéaires en u_{ξ} , v_{ξ} , i_{ξ} et p_{ξ} , qui permettent le calcul de ces quatre grandeurs sur la ligne $\xi = a$ et, par conséquent, la détermination de u , v , p , i et de leurs dérivées par rapport à η sur la ligne $\xi = a + k$.

On dispose donc d'une distribution de valeurs qui permet, déjà à partir de $\xi = a + k$, d'utiliser le système complet traité plus haut.

8. Pour les besoins du calcul numérique, il est encore avantageux d'introduire des grandeurs adimensionnelles que l'on obtient d'une façon spécialement maniable en choisissant comme valeurs de référence les caractéristiques de l'état du fluide avant l'onde de choc (indice 0) et de la forme de cette onde :

longueur de référence	$a = \frac{R}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$	
vitesse	c_0	
pression	p_0	
énergie spécifique	c_0^2	
température	$\frac{C}{\gamma - 1}$	$(C = C^{\text{te}} \text{ de SUTHERLAND})$
masse volumique	ρ_0	
viscosité	$a \rho_0 c_0$	

Nous mentionnons, ici, seulement le fait que les équations obtenues plus haut peuvent être pratiquement conservées sous la même forme, en remplaçant toute grandeur physique par la grandeur sans dimension correspondante. On peut, en outre, conclure que du point de vue aérodynamique deux configurations onde-de-choc-écoulement sont, pour le même gaz, semblables, lorsqu'elles ont mêmes M_0 , R_0 , a .

Un calcul très limité a été exécuté à l'O.N.E.R.A.; pour un calcul plus étendu, l'utilisation d'un groupe calculateur à haute capacité s'impose.

9. Ici nous avons à discuter une autre difficulté, fondamentale pour toutes les méthodes (H. CABANNES, la méthode présente, etc..) dans lesquelles le calcul de l'écoulement aval s'effectue à partir de l'onde elle-même ("problème inverse") :

La pose *numériquement incorrecte* de tout problème de CAUCHY pour tout domaine dans lequel l'équation aux dérivées partielles (ou le système de telles équations) à résoudre est de caractère elliptique (HADAMARD [26], PETROWSKI [27]). Ce cas critique se présente, dans l'étude des écoulements de fluides, toutes les fois que l'on est en présence d'un écoulement subsonique, donc aussi dans le cas exposé ci-dessus.

VII - ANALYSE MATHÉMATIQUE DES ÉQUATIONS COMPLÈTES DU FLUIDE.

1. LE PROBLÈME DIRECT.

1. En deux dimensions, le problème de l'écoulement visqueux stationnaire peut être résumé, de manière un peu brutale, de la façon suivante :

On se donne dans un écoulement plan d'un fluide, obéissant aux équations

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

$$\rho(uu_x + vv_y) = -p_x - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} [\mu(u_x + v_y)] + 2 \frac{\partial}{\partial x} (\mu u_x) + \frac{\partial}{\partial y} [\mu(u_y + v_x)]$$

$$\rho(uv_x + vv_y) = -p_y - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} [\mu(u_x + v_y)] + 2 \frac{\partial}{\partial y} (\mu v_y) + \frac{\partial}{\partial x} [\mu(u_y + v_x)]$$

$$\rho(ui_x + vi_y) - p_x u - p_y v = \phi + \frac{I}{\mathfrak{P}} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\mu i_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu i_y) \right]$$

$$\text{avec } \begin{cases} \phi = \mu \left[-\frac{2}{3} (u_x + v_y)^2 + 2(u_x^2 + v_y^2) + (u_y + v_x)^2 \right] \\ \mu = \mu_0 \frac{i_0 + \frac{c_p}{p} C}{i + \frac{c_p}{p} C} \left(\frac{i}{i_0} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \rho = \frac{c_p p}{r \cdot i} \end{cases}$$

un obstacle (section plane d'un cylindre infini) et une direction privilégiée (en général choisie comme axe x négatif) telle que sur une droite perpendiculaire à cette direction (donc parallèle à l'axe y) $u \rightarrow U_0$, $v \rightarrow 0$, $p \rightarrow p_0$ et $i \rightarrow i_0$ uniformément en y quand $x \rightarrow -\infty$:

On cherche quatre fonctions u , v , p , i définies dans tout le plan à l'extérieur de l'obstacle (à l'exception éventuelle d'un nombre fini de lignes de discontinuité) satisfaisant les équations ci-dessus en tout point (x, y) à l'extérieur de l'obstacle.

Sur les lignes de discontinuité, les valeurs de u , v , i , p des deux côtés seront liées par une relation qui dépend de l'angle d'inclinaison local de la ligne. Pour $x \rightarrow -\infty$, la condition $u \rightarrow U_0$, $v \rightarrow 0$, $p \rightarrow p_0$ et $i \rightarrow i_0$ doit être vérifiée.

Physiquement, c'est le cas de l'écoulement stationnaire autour d'un obstacle suffisamment allongé, placé dans un vent uniforme en attaque perpendiculaire à l'allongement. En général, il n'y aura pas d'écoulement rigoureusement stationnaire dans tout le plan, étant donné la présence inévitable d'un sillage plus ou moins important. En considérant des obstacles peu épais s'étén-

dant considérablement vers l'aval, on peut cependant faire abstraction d'un tel sillage ou le remplacer par une ligne de discontinuité des inconnues. L'écoulement est alors déterminé quand on se donne encore une loi de la température à la surface de l'obstacle.

Mathématiquement, le problème n'est pas encore bien posé sous la forme que nous venons de lui donner. En effet, nous connaissons les valeurs des inconnues à l'infini. En plus, il y a des conditions aux limites sur le contour de l'obstacle : Une condition thermique à la paroi et le fait que la composante de la vitesse, normale à la paroi, est nulle à la surface de l'obstacle. Or, dans les équations de l'écoulement, u , v et i comportent des dérivées du deuxième ordre. Pour avoir dans le cas le plus simple (écoulement partout subsonique sans choc, équations de caractère elliptique) un problème bien déterminé, homologue de celui de DIRICHLET pour l'extérieur du contour dans le cas d'une équation linéaire elliptique, nous devons connaître les valeurs de i , u et v sur l'obstacle.

Pour avoir les valeurs de u et v , dont on ne connaît que le rapport par la condition sur les composantes normales, il faut une hypothèse supplémentaire sur la vitesse de glissement du fluide à la paroi.

Cette condition de glissement fait encore l'objet de discussions : Cependant que dans la théorie "classique" de la couche limite, telle que nous l'avons exposée dans les chapitres précédents, une condition d'adhérence $u_p = v_p = 0$ est généralement adoptée et donne des résultats satisfaisants, il paraît que pour les recherches plus délicates, comme par exemple au sommet d'un obstacle, cette condition n'est pas aussi banale, cf. LAGERSTROM [2].

La question de savoir si, effectivement, le problème que nous venons de présenter comme homologue du problème de DIRICHLET classique, est bien posé dans le cas d'un système non linéaire, ne comporte pas encore de réponse sûre. On sait, d'autre part, peu de chose sur le caractère du système dans le cas où la vitesse à l'infini est suffisamment élevée pour créer des zones d'écoulements supersoniques et d'ondes de choc. Il est donc possible que le problème de type de DIRICHLET ne soit même pas adéquat au caractère du système.

Enfin, les méthodes aussi bien analytiques (y compris les théories modernes telles que celle des distributions) que numériques à notre disposition ne donnent encore aucune possibilité de calculer des solutions discontinues d'équations analytiques dans des cas compliqués. (non linéaires, système de plusieurs équations du deuxième ordre).

2. Il reste donc, dans l'état actuel des choses, pratiquement encore tout à faire. Il sera nécessaire d'étudier d'abord des schémas mathématiques très simplifiés, comme l'ont fait LAGERSTROM, LATTA [28] et autres, avant de pouvoir songer à attaquer le problème direct de l'écoulement visqueux supersonique. Une telle étude permettra peut être un jour de trouver une hypothèse telle que l'avait établie PRANDTL pour la couche limite, et dont nous avons vu la fertilité, même dans le cas compressible, dans les chapitres précédents.

D'autre part, les expériences montrent que dans bien des cas d'écoulements supersoniques, il existe une région assez étendue autour de la tête de l'obstacle, où l'écoulement, après établissement d'un régime stable, est stationnaire derrière une onde de choc détachée également stationnaire.

Il paraît donc physiquement raisonnable d'essayer le procédé inverse et de partir d'une telle onde de choc pour déterminer l'écoulement et le corps derrière elle.

2. LE PROBLÈME INVERSE.

1. En partant d'une onde de choc donnée dans un écoulement supersonique uniforme, nous connaissons les valeurs de u , v , p , i immédiatement après le choc, par les équations de celui-ci.

On pourrait envisager de calculer le champ des inconnues en aval de la ligne du choc, à l'aide des équations de la page 103, pour y trouver une ligne de courant susceptible de cons-

tituer un obstacle physiquement raisonnable. A quelles conditions astreignons-nous une telle ligne de courant ? A première vue, on demanderait, par analogie avec la théorie de la couche limite, une ligne sur laquelle on aurait $u \equiv v \equiv 0$. Cependant, l'existence d'une telle ligne paraît, au moins si la ligne de choc est de forme quelconque, peu probable. De plus, elle impliquerait la condition de non-glissement à la paroi, condition dont la nécessité n'est pas évidente.

Si nous nous restreignons, ici, au cas d'une onde de choc symétrique, nous demanderons l'existence, sur l'axe de symétrie, d'un point où $u = v = 0$, en écartant, au moins momentanément, toutes les formes d'une onde de choc ne présentant pas un tel point. C'est la ligne de courant passant par ce point qui définira notre obstacle.

Cependant, la configuration que l'on obtient ainsi et qui servira à l'étude de l'écoulement à proximité de l'axe de symétrie, c'est-à-dire dans la région, où la théorie classique de la couche limite est inapplicable (ou plutôt appliquée de façon illicite) pour les raisons exposées au paragraphe 3 du premier chapitre, doit être physiquement raisonnable.

2. Ceci implique deux conditions : celle d'une forme acceptable de l'obstacle et celle de vitesses de glissement très faibles et qui, par conséquent, ne soient pas en désaccord avec les observations. Il est impossible de prévoir, comme d'ailleurs dans le problème analogue posé en fluide parfait par CABANNES, si une telle solution existe pour une onde arbitrairement donnée. Il n'est donc pas question d'obtenir des configurations données a priori, mais de modifier la forme de l'onde jusqu'à ce qu'une configuration soit acceptable dans le sens défini ci-dessus. Pour ceci, il sera raisonnable de partir d'une forme analytiquement très simple de l'onde de choc, mais qui corresponde bien aux observations physiques. C'est pourquoi, dans le paragraphe 3 du chapitre VI, nous avons choisi l'hyperbole.

Le problème ainsi posé a le caractère d'un problème de CAUCHY, appliqué à un système de quatre équations à quatre inconnues, dont trois contiennent des dérivées du second ordre, pendant que la quatrième n'a que des dérivées du premier ordre. Il est donc clair qu'étant donné l'ordre total du système, la connaissance sur la ligne du choc, des valeurs u, v, p, i ne suffit pas pour la pose correcte du problème et pour la détermination des inconnues.

Par analogie avec la forme bien connue du théorème de CAUCHY-KOWALEWSKY dans le cas d'une équation linéaire aux dérivées partielles du deuxième ordre, nous devons demander, en plus des valeurs de u, v, i, p sur l'onde de choc, la connaissance des dérivées u_x, v_x, i_x .

Et puisque l'onde de choc elle-même ne nous fournit pas cette connaissance, une hypothèse supplémentaire est nécessaire, comme celle que nous avons choisie dans le paragraphe 3 du chapitre précédent : Considérer l'écoulement comme non visqueux à proximité immédiate de l'onde de choc, de façon que l'on puisse déterminer u_x, v_x, i_x par le système du premier ordre déjà étudié par CABANNES [21].

Ce procédé a l'avantage supplémentaire d'assurer l'analyticité des données de CAUCHY, exigée pour l'existence d'une solution. De plus, elle donne la valeur de p_x en accord avec les précédentes, ce qui facilite beaucoup le départ du calcul numérique.

3. Cependant, il se soulève une objection de principe très grave qui est déjà valable pour le système des équations dans le cas non-visqueux étudié par CABANNES :

En effet, dans le cas d'une équation linéaire du deuxième ordre, HADAMARD [26] et, dans le cas d'un système de nombre quelconque d'équations non nécessairement linéaires, PETROWSKY [27] ont démontré qu'un problème de CAUCHY bien posé dans le sens ci-dessus (ayant, pour les données de départ analytiques, une et une seule solution analytique) peut pourtant ne pas admettre une solution physiquement applicable.

En effet, il existe, sous certaines conditions, des données de CAUCHY analytiques aussi

voisines que l'on veut et telles que les solutions correspondantes soient, à une distance arbitrairement petite du support des données, aussi différentes l'une de l'autre qu'on désire.

Un tel problème de CAUCHY sera appelé, d'après HADAMARD, "numériquement mal posé" malgré l'existence et l'unicité de la solution analytique.

En effet, si la forme des équations et des données de CAUCHY ne permet pas d'écrire explicitement la solution analytique (et c'est ainsi dans notre cas), aucune approximation numérique ne peut donner de résultats sûrs, étant donné qu'elle peut être, aussi bien une approximation des données du problème visé que d'un problème aux données très voisines, mais par la suite totalement différent.

Or, dans le cas d'une équation linéaire du second ordre, HADAMARD a démontré que le problème de CAUCHY, pour une équation du type elliptique, n'est jamais numériquement bien posé.

PETROWSKY a pu donner la condition nécessaire et suffisante pour que le problème de CAUCHY dans le cas d'un système linéaire soit bien posé. Le critère de PETROWSKY généralise, pour systèmes d'équations linéaires du premier ordre en x , les notions de "système hyperbolique" et de "système parabolique". Dans ces deux cas, il prend la forme d'un critère de la réalité des racines d'une équation caractéristique.

Dans les autres cas, son application est plutôt malaisée, sauf pour les systèmes à coefficients constants : On vérifie alors que le critère n'est pas satisfait, en accord avec les résultats de HADAMARD, pour un système équivalent à une équation du second ordre, elliptique.

4. PETROWSKY a généralisé son critère aux systèmes non-linéaires dans le cas hyperbolique [27]. Dans les autres cas, tout reste encore à faire, mais il est néanmoins probable que le problème de CAUCHY est, dans le cas général, numériquement mal posé quand les équations correspondent à un problème de caractère elliptique, comme c'est précisément le cas dans un écoulement subsonique. Or, dans la région qui nous intéresse, derrière le sommet d'une onde de choc détachée, l'écoulement est nécessairement subsonique, et le problème de CAUCHY est donc fort probablement mal posé pour un calcul numérique.

Ce résultat, un peu décourageant, est confirmé par l'expérience physique : En effet, un changement assez brutal du corps se traduit, en général, par un changement souvent imperceptible de l'onde de choc. A deux ondes voisines correspondent, en général, deux obstacles complètement différents.

Le calcul numérique, aussi bien dans le cas de CABANNES que dans celui qui nous intéresse ici, ne donne, par conséquent, pas "le" corps (ou dans le problème visqueux "la" configuration) correspondant à une onde de choc donnée, mais un des corps ou une des configurations correspondant à une infinité de formes de l'onde de choc voisines.

L'interprétation d'une configuration physiquement raisonnable, obtenue par l'application du procédé du chapitre VI, paragraphe 3, doit donc nécessairement partir de l'obstacle : Elle permet d'étudier l'écoulement visqueux au voisinage du sommet de l'obstacle trouvé dans les conditions de vitesses, températures et pressions ainsi calculées. Il est souhaitable d'en posséder une grande variété pour pouvoir confronter ces écoulements avec ceux que l'on obtient par des théories simplifiées à partir des mêmes conditions aux limites.

Dans le cas où l'on aurait trouvé une ligne $u \equiv v \equiv 0$ avec une certaine distribution de températures et de vitesses, ce serait par exemple les résultats de la théorie classique de la couche limite, extrapolée pour la région voisine du sommet de l'obstacle, qu'il faudrait confronter avec le champ des vitesses, températures et pressions obtenu par la méthode du chapitre VI, paragraphe 3.

3. CORRESPONDANCE ENTRE OBSTACLE ET FORME DE L'ONDE DE CHOC.

1. Nous pouvons admettre qu'à un obstacle donné correspond, dans un écoulement supersonique, ou bien aucune solution stationnaire du système des équations, page 103, ou bien une seule. Vice versa, à un choc donné correspondra un obstacle seulement dans certains cas où la forme de l'onde s'apparente plus ou moins, dans le cas symétrique et à proximité de l'axe de symétrie, à une hyperbole. A la même onde physique (c'est-à-dire déterminée avec une précision donnée) correspond cependant un nombre pratiquement illimité d'obstacles.

Le calcul de l'onde de choc à partir de l'obstacle dépend, par conséquent, de deux conditions impossible à satisfaire actuellement :

a) Un critère mathématique, interprétation simplifiée d'une hypothèse physiquement raisonnable, pour décider de l'existence d'une solution stationnaire des équations du fluide visqueux dans son mouvement à deux dimensions autour du corps proposé.

b) Une méthode permettant, d'abord pour un schéma judicieusement simplifié, la solution d'un système d'équations aux dérivées partielles qui, pour un régime supersonique, comporte une ligne de discontinuité de position inconnue, mais dont la traversée s'effectue dans des conditions connues.

La condition a) exclut, pour le moment, l'étude immédiate du problème b) à partir d'une forme d'obstacle simple mais arbitrairement choisie.

2. Il paraît donc souhaitable de calculer, à partir d'une onde de choc supposée stationnaire et à l'aide de la méthode inverse exposée ci-dessus, un corps qui corresponde effectivement à un problème avec onde de choc stationnaire, et ceci en partant d'une forme simple qui s'apparente bien aux ondes observées dans les expériences, tout en offrant la possibilité, en cas d'échec du calcul, de retouches faciles.

C'est dans cet esprit que l'auteur se propose d'effectuer une série d'applications numériques de la méthode exposée dans le chapitre VI, paragraphe 3, en partant de l'hyperbole, forme de l'onde répondant bien aux conditions ci-dessus.

A partir d'une telle configuration, qui évite les difficultés introduites par la condition a), il sera possible d'attaquer l'analyse mathématique du deuxième point.



VIII - CONCLUSION.

1. La théorie de la couche limite laminaire bidimensionnelle en régime incompressible permet une généralisation logique au cas des écoulements compressibles. Il est possible de résoudre ainsi le problème de l'écoulement visqueux au voisinage de la surface d'un obstacle quand on suppose l'écoulement extérieur (potentiel ou pratiquement à potentiel) connu.

Trois méthodes dont les résultats en régime incompressible sont connus et confirmés par l'expérience, la méthode de POHLHAUSEN, la méthode des différences finies et la méthode (semi-) hodographique de CROCCO et HANTZSCHE et WENDT ont été adaptées (la première par GRUSCHWITZ, les autres par l'auteur, la deuxième en partie en collaboration avec Mme FLÜGGE-LOTZ) au cas compressible et appliquées par l'auteur à un exemple typique. Les résultats de cette application seront donnés en annexe.

2. Il est intéressant de noter que la troisième de ces méthodes permet une évaluation de l'influence des conditions initiales sur le développement de la couche limite, influence faible dans tous les cas où elle ne modifie pas trop la forme de l'obstacle et le caractère de l'écoulement extérieur.

Ainsi voit-on que certaines difficultés dans la détermination de la couche limite à la tête de l'obstacle, provenant du fait que les simplifications de la théorie de PRANDTL cessent ici d'être valables, sont sans importance en écoulement subsonique et dans tous les cas où des phénomènes de choc ne se présentent pas. Le problème est plus délicat en écoulement supersonique.

Dans ce dernier cas, la présence de la couche limite modifie profondément le choc qui précède l'obstacle, surtout pour les obstacles très pointus, dont elle change le choc attaché en choc détaché, modifiant, d'autre part, la longueur effectivement parcourue par l'écoulement le long de la paroi de l'obstacle.

3. Une tentative pour tenir compte de cette influence mutuelle de la couche limite et de l'onde de choc (détachée) par un calcul itératif dans lequel on se place à tour de rôle au point de vue de la couche limite, ou au point de vue du fluide parfait, ayant échoué, il paraît indispensable d'abandonner, au moins près de la pointe de l'obstacle, les simplifications de la théorie classique de PRANDTL pour chercher une solution plus adéquate.

Les difficultés mathématiques et physiques qui s'opposent à une telle recherche sont mises en évidence :

4. Il s'agit de l'impossibilité de classer le problème aux limites comportant une ligne de discontinuité de forme inconnue, parmi les problèmes classiques intervenant dans les équations aux dérivées partielles de second ordre; de la difficulté, en découlant, de simplifier les équations non-linéaires par des hypothèses appropriées et ne faussant pas le problème; du fait qu'il n'a pas nécessairement une solution stationnaire pour chaque forme de l'obstacle et que, d'autre part, le corps est très sensible aux moindres modifications de l'onde de choc, ce qui s'oppose à l'application de la méthode inverse.

C'est toutefois cette dernière qui paraît au moins permettre, dans l'état actuel des choses, un calcul numérique d'orientation. Une méthode algébrique (différences finies) qui utilise un procédé de linéarisation partielle est proposée et discutée. Son application, extrêmement lourde, est prohibitive pour tout calcul à l'aide de machines à calculer ordinaires. Par conséquent, il n'a été effectué qu'un calcul très restreint qui n'avait pour but que de montrer la stabilité du calcul en cas de changement de longueur du pas employé pour la formation des différences. Un calcul, à l'aide d'une machine à calculer plus puissante, est prévu à l'Office National d'Etudes et de Recherches Aéronautiques.

5. En résumé, on peut affirmer que le calcul de la couche limite laminaire compressible est toujours possible par une des trois méthodes ici présentées, suivant les conditions d'exactitude ou de rapidité requises. Les résultats seront, en régime subsonique, en bon accord malgré les différences entre les méthodes employées.

La présence d'une onde de choc risque de changer profondément le problème. A notre connaissance, il n'existe pas encore de solution satisfaisante dans ce dernier cas qui, d'après Maurice ROY, nécessite une théorie nouvelle qui ne soit pas seulement un assemblage de théories hétérogènes et, dans leurs hypothèses, contradictoires (onde de choc, couche limite).

IX - ANNEXE.

1. Pour le calcul des résultats contenus dans les figures 1-32 ci-après, il a été commode d'introduire des grandeurs sans dimension. Il a donc fallu choisir des grandeurs de référence appropriées.

Dans la littérature, on trouve surtout deux systèmes de grandeurs de référence, dont l'un est constitué des valeurs d'état du fluide à l'infini, l'autre des valeurs d'état à l'arrêt isentropique.

Ce dernier système a l'avantage d'être défini d'une façon précise, aussi bien en écoulement subsonique qu'en écoulement supersonique; son inconvénient réside dans la définition de la vitesse correspondante. En effet, la vitesse du fluide est nulle en un tel point. C'est pourquoi on choisit, en général, comme vitesse de référence la célérité du son correspondant à l'arrêt isentropique.

Cette vitesse que nous appellerons a_i (l'indice i indiquant l'arrêt isentropique) n'a cependant aucune relation avec les vitesses intervenant effectivement dans l'écoulement étudié et peut, par conséquent, être d'un ordre de grandeur tout à fait différent, donc peu pratique pour le calcul.

De plus, l'arrêt isentropique ne correspond pas nécessairement à un point de l'écoulement (par exemple dans le cas de la plaque plane) et doit alors être déterminé par une extrapolation à partir de l'état du fluide en un autre point de l'écoulement.

Il convient donc surtout aux écoulements avec point d'arrêt derrière une onde de choc détachée, où il est souvent malaisé de se servir de l'autre système de référence, celui des valeurs à l'infini :

En effet, dans ce deuxième système, il est, pour une distribution de vitesses extérieures données (par exemple mesurées), souvent assez difficile de déterminer quel serait l'état du fluide dans un écoulement non perturbé à l'infini amont. C'est pourquoi on a choisi, quelquefois, l'infini aval comme référence; cependant, cet infini aval est souvent aussi peu réel que l'infini amont, soit à cause du décollement qui change le comportement du fluide à l'aval, soit par l'interaction avec une onde de choc incidente.

2. Dans le cas de l'exemple "étalon"

$$\frac{u_e}{U} = \frac{\frac{x}{L} \left(\frac{x}{L} + 5 \right)}{\left(\frac{x}{L} + 1 \right)^2}$$

qui a servi comme base aux calculs d'application des méthodes du chapitre III, on a fait abstraction de toutes ces difficultés en menant le calcul comme si l'écoulement extérieur

restait à potentiel pour tout le domaine $0 \leq x \leq x_d$ considéré. On pouvait donc adopter aussi bien le premier système de référence (adapté à l'infini aval donné immédiatement par la forme asymptotique de u_e/U pour $x \gg L$) que le second (étant donné que l'écoulement choisi présente, pour $x = 0$, un point d'arrêt).

3. Les calculs d'application de la méthode du paragraphe 2 du chapitre III ont été faits à l'aide du premier système : Il a été choisi, pour les grandeurs de référence, l'état au point d'arrêt :

vitesse de référence	a_i
masse spécifique de référence	ρ_i
viscosité de référence	μ_i
pression de référence	$\rho_i a_i^2$
température de référence	T_i
énergie de référence	a_i^2

et, comme longueur de référence, celle de l'obstacle, L .

Les grandeurs sans dimension ainsi obtenues ont été caractérisées par le signe $\sim$ au-dessus de la lettre :

Avec

$$\mathcal{R}_i = \frac{L \rho_i a_i}{\mu_i}$$

on trouve :

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \frac{x}{L} & \tilde{\mu} &= \frac{\mu}{\mu_i} \\ \tilde{y} &= \frac{y}{L} \sqrt{\mathcal{R}_i} & \tilde{\rho} &= \frac{\rho}{\rho_i} \\ \tilde{u} &= \frac{u}{a_i} & \tilde{j} &= \frac{j}{a_i^2} \\ \tilde{v} &= \frac{v}{a_i} \sqrt{\mathcal{R}_i} & \tilde{p} &= \frac{p}{\rho_i a_i^2} \\ \tilde{T} &= \frac{T}{T_i} \end{aligned}$$

Enfin, on a utilisé la transformée de x ,

$$\xi = \int_{x_0}^x \frac{ds}{\rho_e u_e},$$

dont la forme non-dimensionnelle est

$$\tilde{\xi} = \frac{\rho_i a_i}{L} \xi.$$

Pour le calcul numérique, dont la marche est illustrée par les deux feuilles de calcul jointes, on a choisi

$$\mu_i = 1,8 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg s}}{\text{m}^2}, \quad \rho_i = 0,125 \frac{\text{kg s}^2}{\text{m}^4}$$

$$a_i = 338,5 \text{ m/s}, \quad T_i = 288^\circ \text{ K}, \quad L = 1 \text{ m}.$$

Des deux feuilles de calcul (1 et 2), la première se rapporte au calcul des profils des vitesses u/u_e pour $\mathcal{P} = 1$, la deuxième au calcul des corrections pour l'enthalpie totale dans le cas $\mathcal{P} = 0,725$.

Les profils ainsi obtenus sont représentés, en fonction de $\tilde{y}$ et du paramètre $\tilde{\xi}$, dans les figures 10 à 12.

4. Il a fallu confronter, dans le chapitre IV, paragraphes 1, 2, deux écoulements, différents

pour $0 \leq x/L \leq 0,25$, identiques pour $x/L \geq 0,25$, dont l'un (l'exemple étalon) comportait un point d'arrêt, cependant que l'autre était au début équivalent à celui qui existe le long de la plaque plane : Ce fait a nécessité l'adoption, pour les deux méthodes utilisées pour cette confrontation – celles du chapitre III, paragraphe 1 et paragraphe 3 – des grandeurs à l'infini aval comme système de référence :

vitesse de référence	$U = u_0$
masse spécifique de référence	ρ_0
viscosité de référence	μ_0
pression de référence	p_0
température de référence	T_0
énergie de référence	u_0^2

Pour arriver, dans le cas de l'écoulement "étalon", à des valeurs d'état au point d'arrêt identiques à celles utilisées dans 3, on a choisi :

$$L = 1 \text{ m}, \quad U = 304 \text{ m/s}, \quad \nu_0 = \frac{\mu_0}{\rho_0} = 1,9425 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s} \text{ et } T_0 = 241,5^\circ \text{K, cf. chapitre III, § 1, 5.}$$

C'est en fonction de ces grandeurs qu'ont été rapportées les courbes des figures 3 à 8 et 27 à 30 confrontant les résultats des différentes méthodes.

5. Une remarque à propos des notations s'impose :

On avait posé, dans le paragraphe 3 du chapitre III et dans les chapitres suivants, $\xi = x/L$. On a gardé, par commodité, cette notation dans la plupart des figures, aucune confusion avec la transformée ξ de x , uniquement employée dans le paragraphe 2 du chapitre III, n'étant à craindre. Le paramètre ξ , conservé dans les figures 10 à 12, est cependant la forme sans dimension de cette dernière transformée et n'a aucun rapport avec $\xi = x/L$.

Bibliographie

- [1] L. CROCCO - Una caratteristica trasformazione delle equazioni dello strato limite nei gas. Atti di Guidonia, n°7, 10 mai 1939.
- [2] P.A. LAGERSTROM, J.D. COLE, L. TRILLING - Problems in the theory of viscous compressible fluids. Cal. Inst. of Technology of Pasadena, mars 1949.
- [3] L. HOWARTH - On the calculation of the steady flow in the boundary layer near the surface of a cylinder in a stream. A.R.C. Report 1632, 1935.
- [4] R. COURANT, K. FRIEDRICH, H. LEWY - Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik. Mathem. Annalen, Tome 100, 1928, p.32.
- [5] H. WITTING - Verbesserung des Differenzen-Verfahrens von H. Görtler zur Berechnung laminarer Grenzschichten. ZAMP, vol.IV, fasc.5, 1953.
- [6] K. SCHRÖDER - Ein einfaches numerisches Verfahren zur Berechnung der laminaren Grenzschicht. Lufo, F.B. n° 1741, ZWB 1943.
- [7] A. BUSEMANN - Gasströmung mit laminarer Grenzschicht entlang einer Platte. ZAMM, Tome 15, 1935, p.23.
- [8] E. GRUSCHWITZ - Calcul approché de la couche limite laminaire en écoulement compressible sur une paroi non conductrice de la chaleur. O.N.E.R.A. Publication n° 47 1950.
- [9] L. COLLATZ - Das Differenzenverfahren mit höherer Approximation für lineare Differenzengleichungen. Schriften des Math. Sem. der Universität, Berlin, Vol.3, 1934.
- [10] W. HANTZSCHE & H. WENDT - Zum Kompressibilitätseinfluss bei der laminaren Grenzschicht der ebenen Platte. Jahrbuch 1940 der Deutschen Luftfahrtforschung, p.1, 517 ss
- [11] L. CROCCO - Lo strato laminare nei gas. Monografie Scientifiche di Aeronautica, n°3, Roma, décembre 1946.
- [12] F. BOUNIOL & E.A. EICHELBRENNER - Calcul de la couche limite laminaire compressible, cas de la plaque plane. La Recherche Aéronautique, n°28, 1952.
- [13] E.A. EICHELBRENNER - Sur une méthode approchée de calcul de la couche limite laminaire compressible pour gradient de pression extérieur, loi de température à la paroi et nombre de Prandtl quelconques. La Recherche Aéronautique, n°34, 1953.
- [14] O. BARDSEY - The conditions at a sharp leading edge in supersonic flow. Philos. Magazine 1951, n°326, p.255 ss.
- [15] R. LEGENDRE - Méthodes d'étude de l'écoulement laminaire. PST, n°248, 1950.
- [16] G.F. CARRIER & C.C. LIN - On the nature of the boundary layer near the leading edge of a flat plate. Quarterly of Applied Mathematics, Vol. VI, n°1, avril 1948.

- [17] A. OUDART & E.A. EICHELBRENNER - Observations sur un critère de décollement laminaire dans la couche limite tridimensionnelle. La Recherche Aéronautique n°40 1954.
- [18] H. SCHLICHTING - Grenzschichttheorie. Verlag G. Braun, Karlsruhe 1951.
- [19] J.A. LAURMANN - Stability of the compressible laminar boundary layer with an external pressure gradient. Cranfield Rep. n°48, 1951.
- [20] H. GÖRTLER - Über eine dreidimensionale Instabilität laminarer Grenzschichten an konkaven Wänden. ZAMM, tome 21, 1941, p.250.
- [21] H. CABANNES - Détermination théorique de l'écoulement d'un fluide derrière une onde de choc détachée. O.N.E.R.A., Note technique n°5, 1951.
- [22] E. MOECKEL - Approximate method for predicting form and location of detached shock waves ahead of plane or axially symmetric bodies. N.A.C.A. T.N. 1921.
- [23] G.S. LUDFORD - The classification of one dimensional flows and the general shock problem of a compressible, viscous, heatconducting fluid. J.A.S., décembre 1951.
- [24] S.S. SHU - On two dimensional flow after a curved stationary shock. N.A.C.A., T.N.1364.
- [25] J. LEGRAS - Nouvelles applications de la méthode de Lighthill à l'étude des ondes de choc. O.N.E.R.A. publication n°66.
- [26] J. HADAMARD - Le problème de Cauchy. Paris, Hermann & Cie, 1932.
- [27] I. PETROWSKY - Über das Cauchy-Problem für ein System linearer partieller Differentialgleichungen im Gebiete der nicht analytischen Funktionen. Bulletin de l'Université d'Etat de Moscou, fasc.7, 1938, p.1-74.
- [28] G.E. LATTA - Singular perturbation problems. Thesis, Calif. Inst. of Technol. 1951.
-

η	$g(\eta)$	η	$g(\eta)$	η	$g(\eta)$
0	0,46960	0,450	0,43679	0,875	0,19795
0,050	0,46955	0,500	0,42436	0,900	0,16886
0,100	0,46924	0,550	0,40896	0,925	0,13642
0,150	0,46840	0,600	0,39020	0,950	0,09968
0,200	0,46675	0,650	0,36759	0,960	0,08340
0,250	0,46403	0,700	0,34055	0,970	0,06600
0,300	0,45997	0,750	0,30835	0,980	0,04709
0,350	0,45428	0,800	0,27004	0,990	0,02603
0,400	0,44666	0,850	0,22426	1,000	0

TABLÉAU 1 - Valeurs de la fonction $g(\eta)$

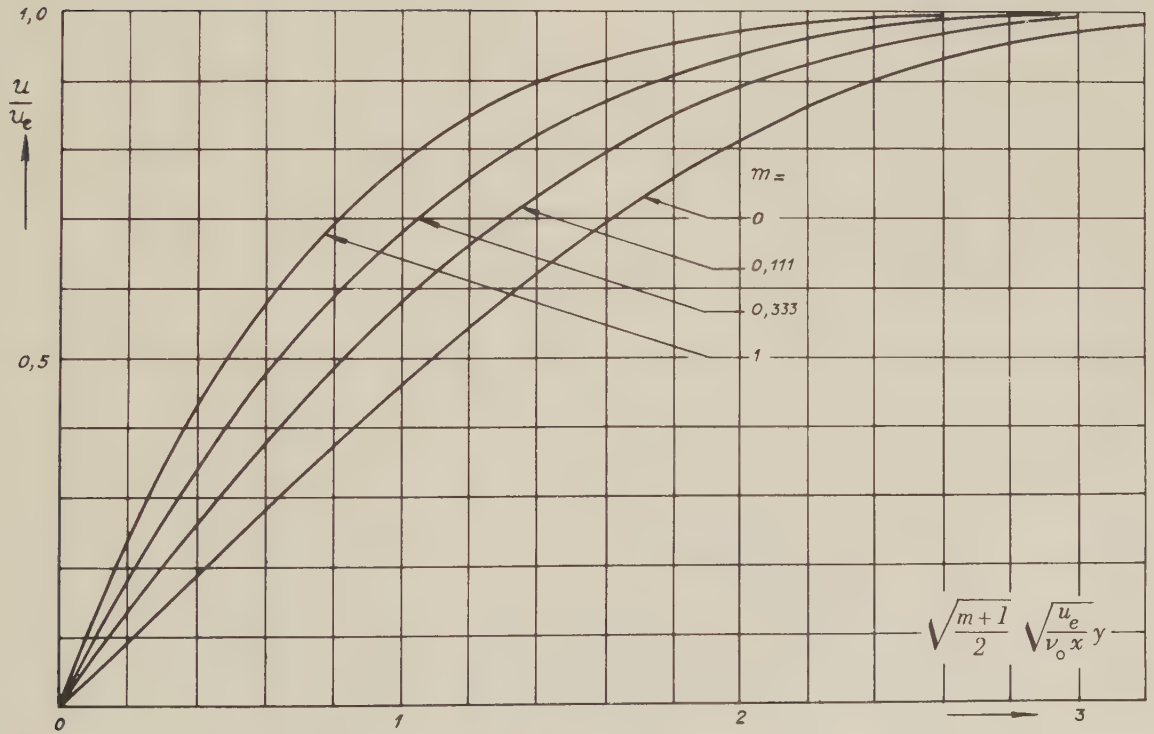


Fig.1

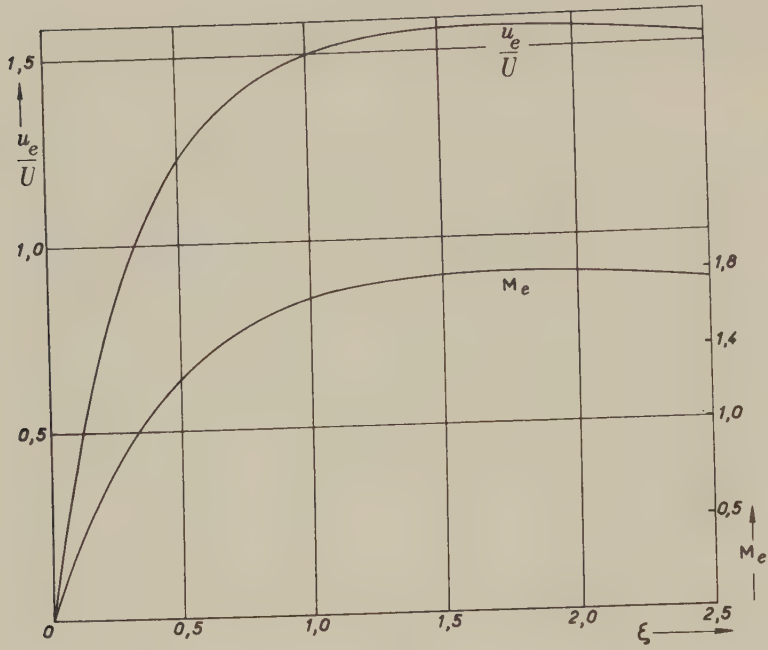


Fig. 2

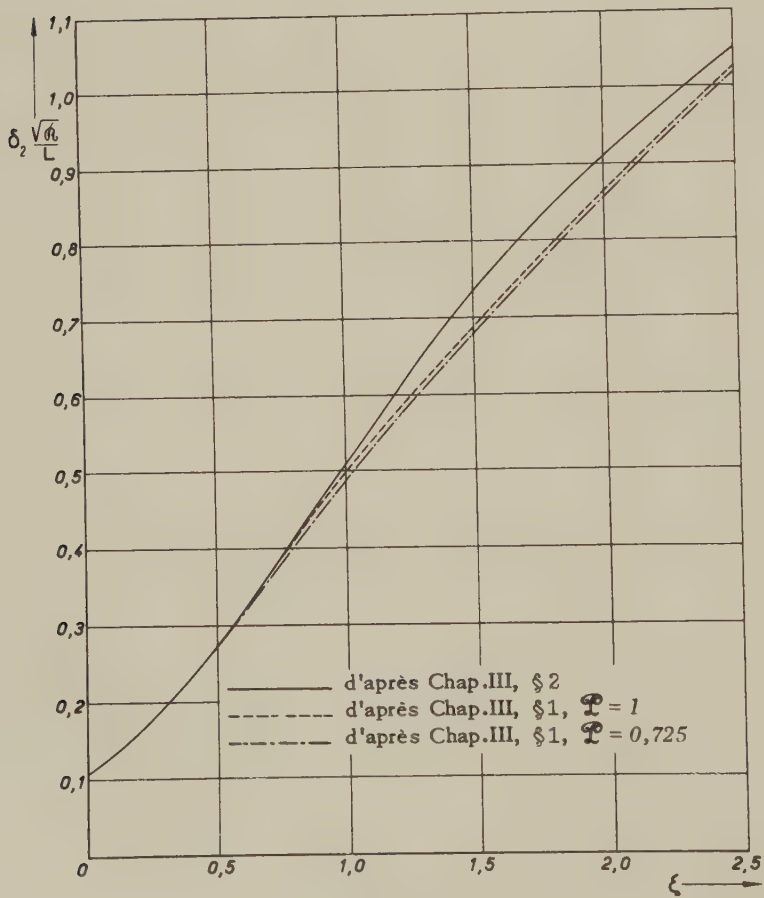


Fig. 3—Courbes de δ_2 .

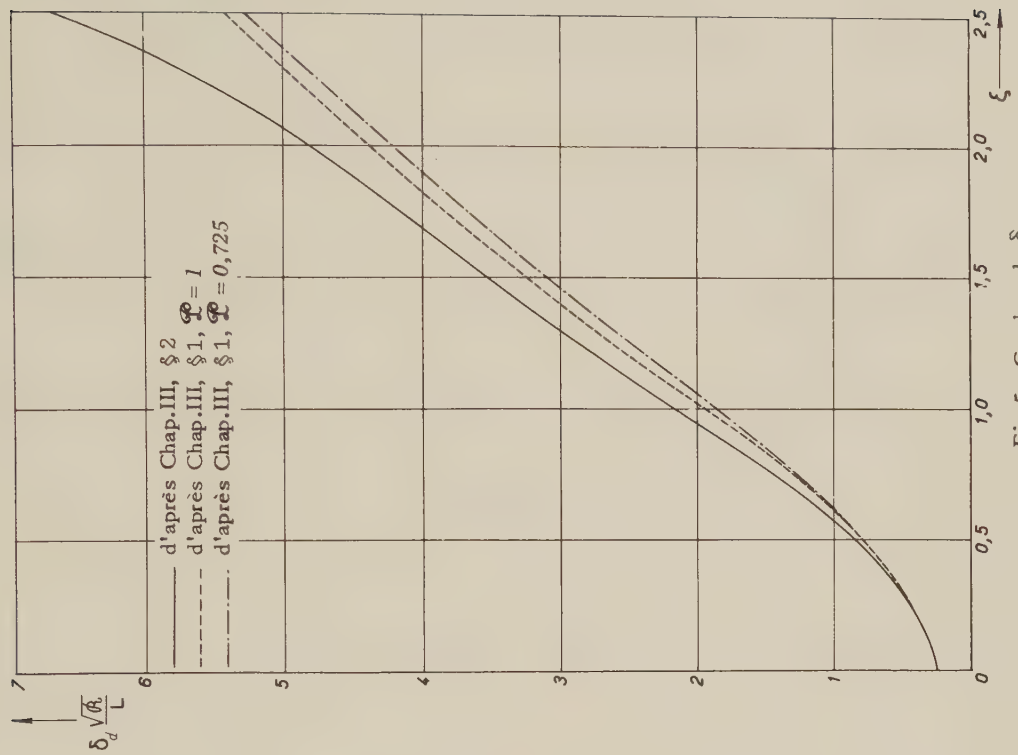


Fig.5— Courbes de δ_d

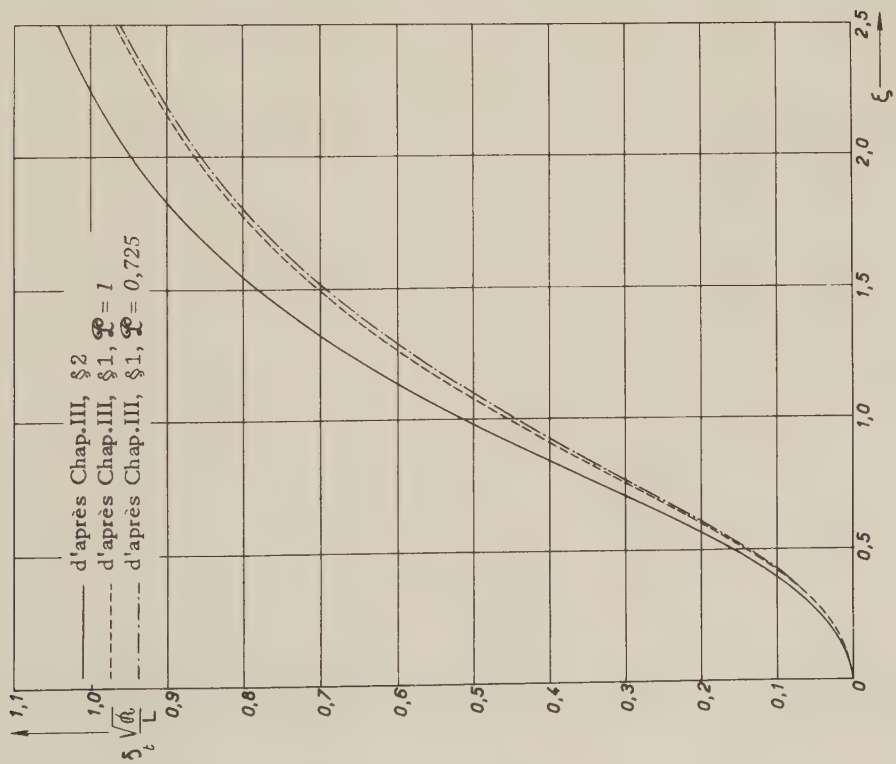


Fig.4— Courbes de δ_t

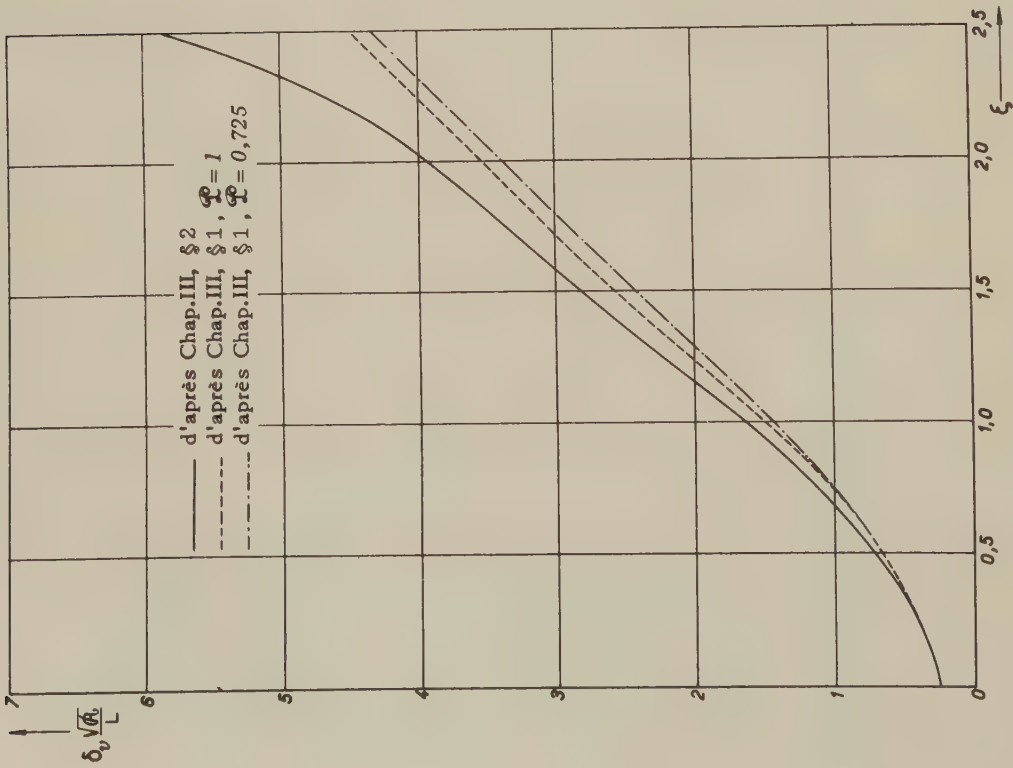


Fig.6 - Courbes de δ_v .

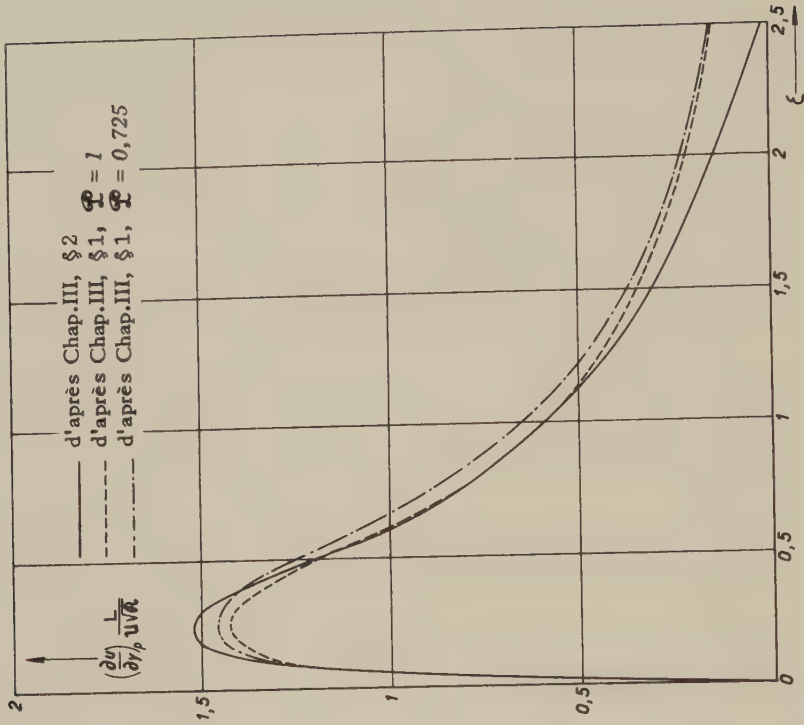


Fig.7 - Courbes de $\left(\frac{du}{dy}\right)_p$

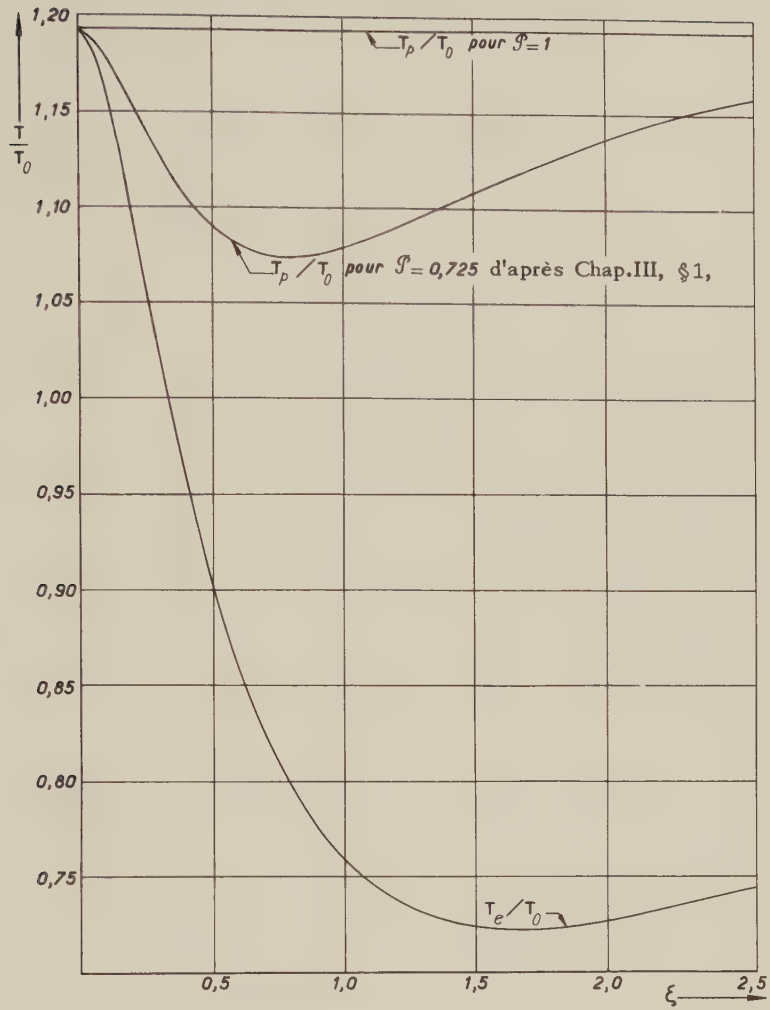


Fig.8- Courbes des températures à la paroi et à la frontière de la couche limite.

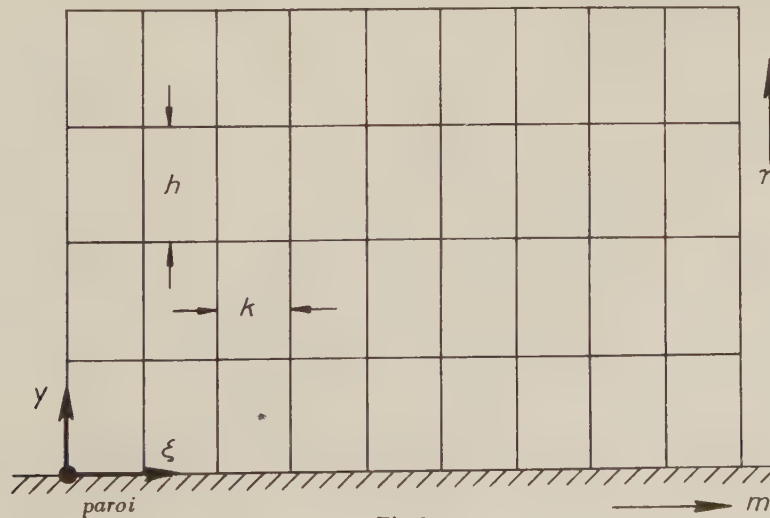


Fig.9

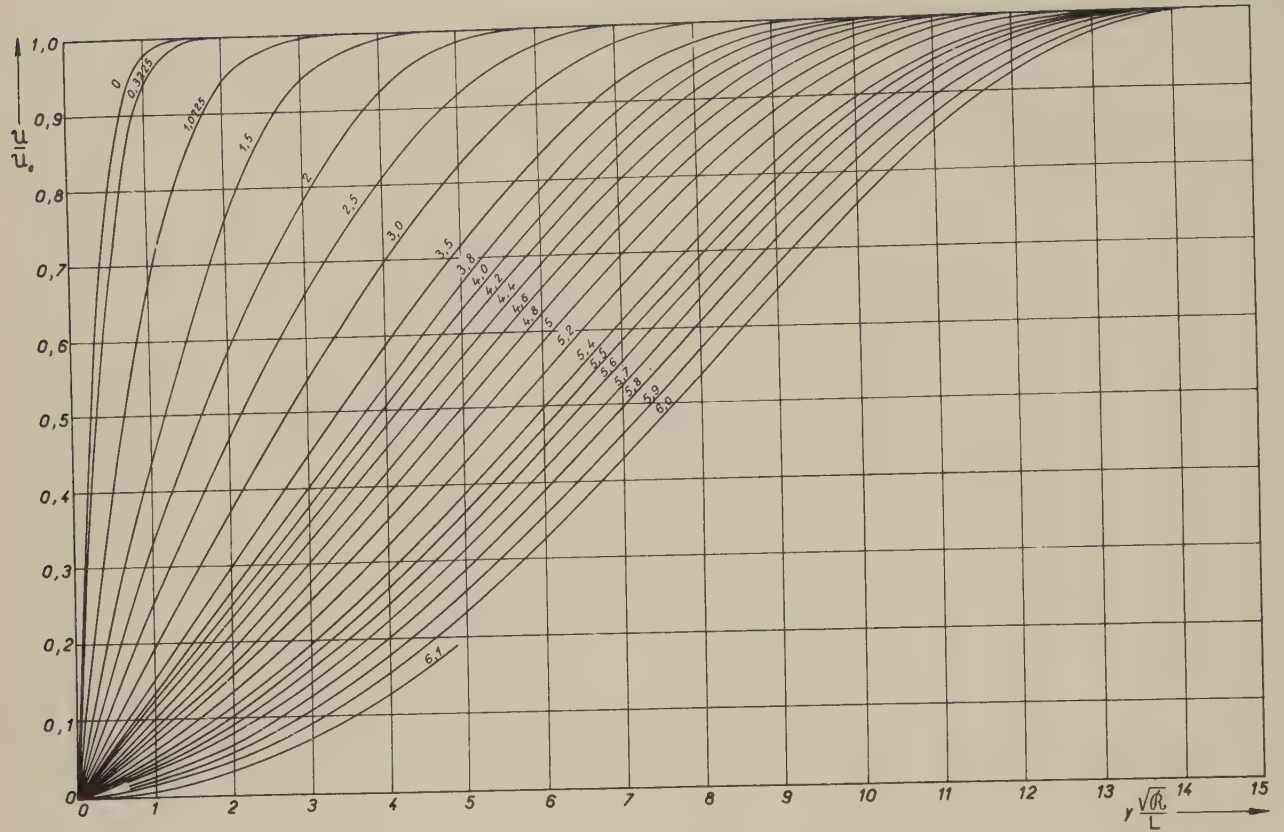


Fig.10 - Profils des vitesses $\frac{u}{u_e}$ pour $\mathfrak{L} = 1$, calculés d'après la méthode Chap.III, § 2,

Paramètre : $\xi \cdot \frac{(\rho \cdot a)_i}{L} = \tilde{\xi}$ (indice i : Arrêt isentropique)

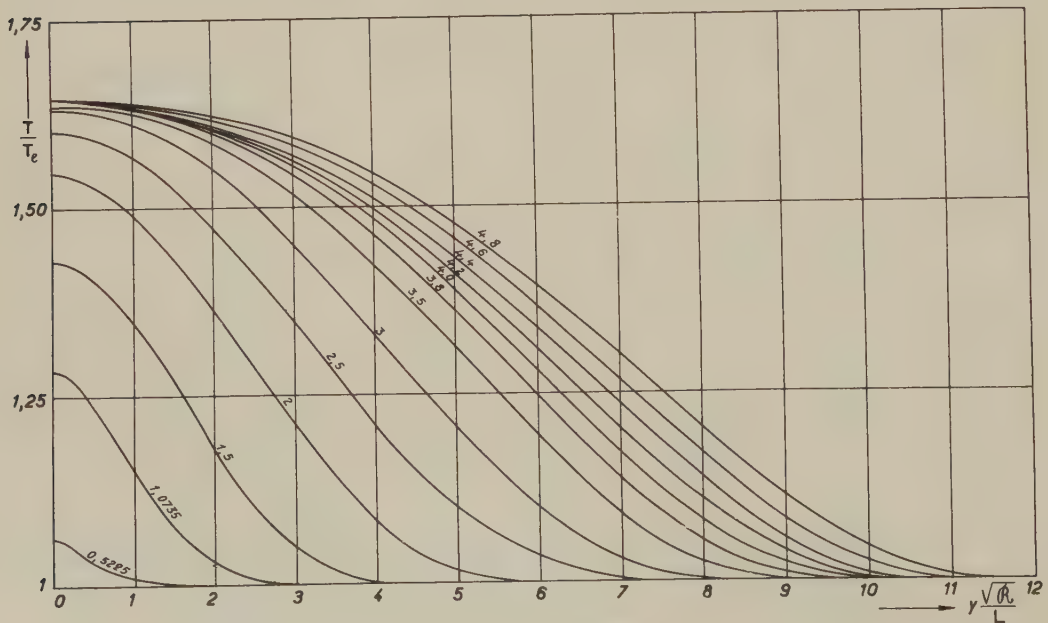


Fig.11 - Profils des Températures pour $\mathfrak{L} = 1$ d'après Chap.III, § 2,

(Paramètre : $\tilde{\xi} = \xi \frac{(\rho a)_i}{L}$).

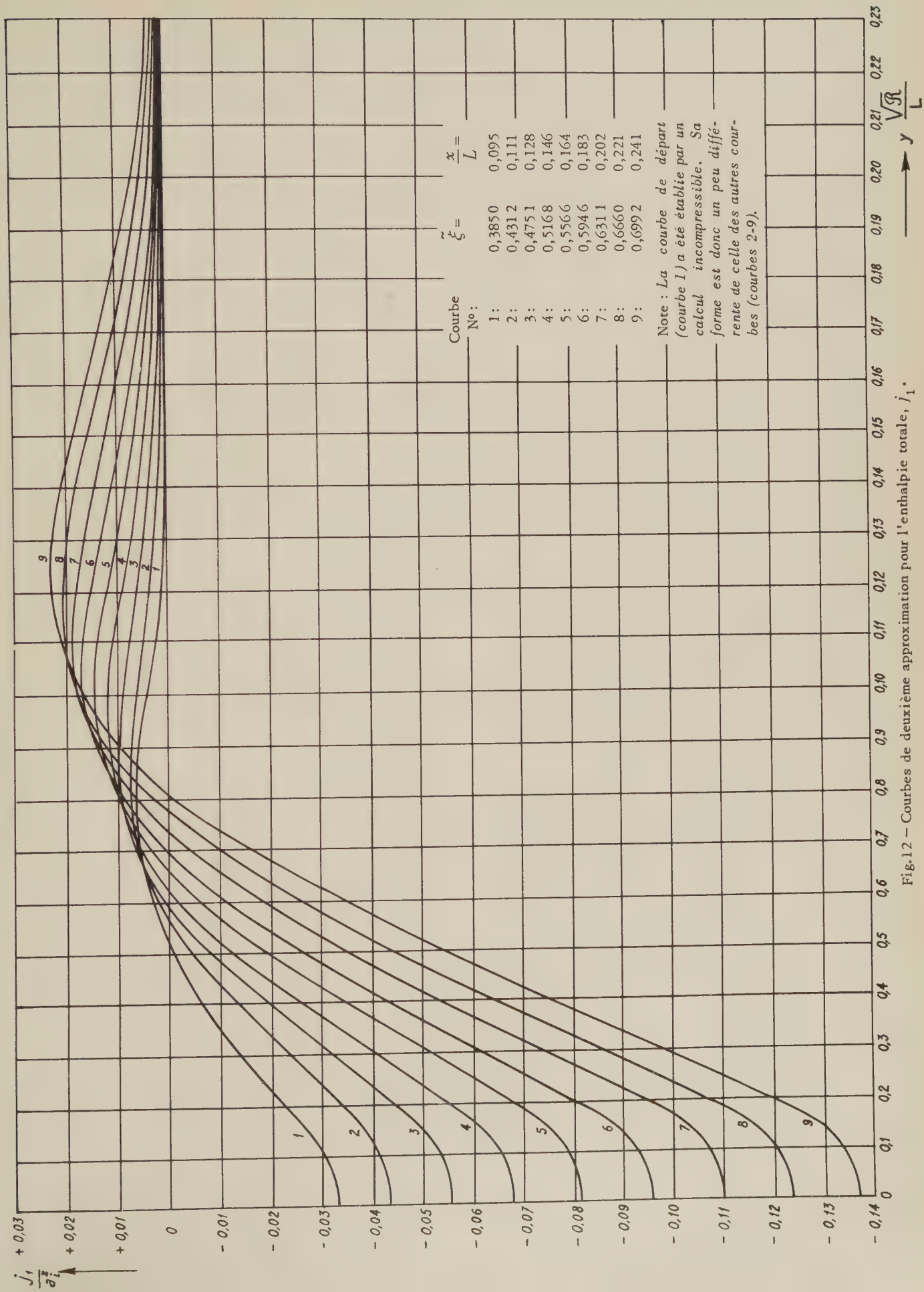


Fig.12 - Courbes de deuxième approximation pour l'enthalpie totale, j_1 .

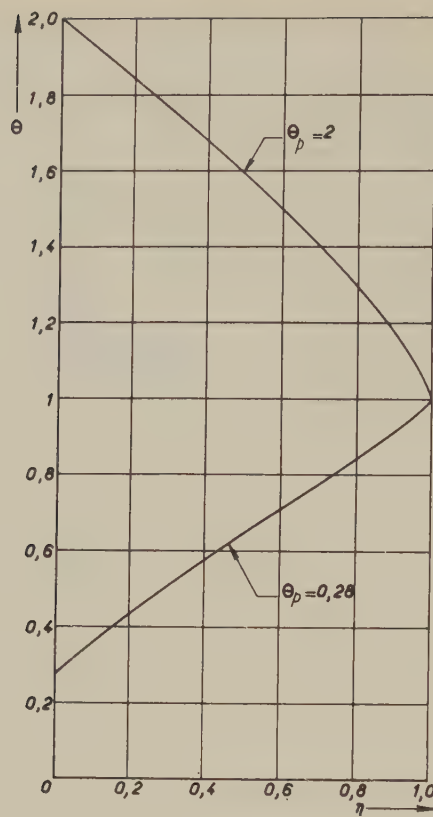


Fig.13 - Valeurs de θ pour $\begin{cases} M=1 \\ \theta_c=0,3333 \end{cases}$
(paramètre : θ_p)

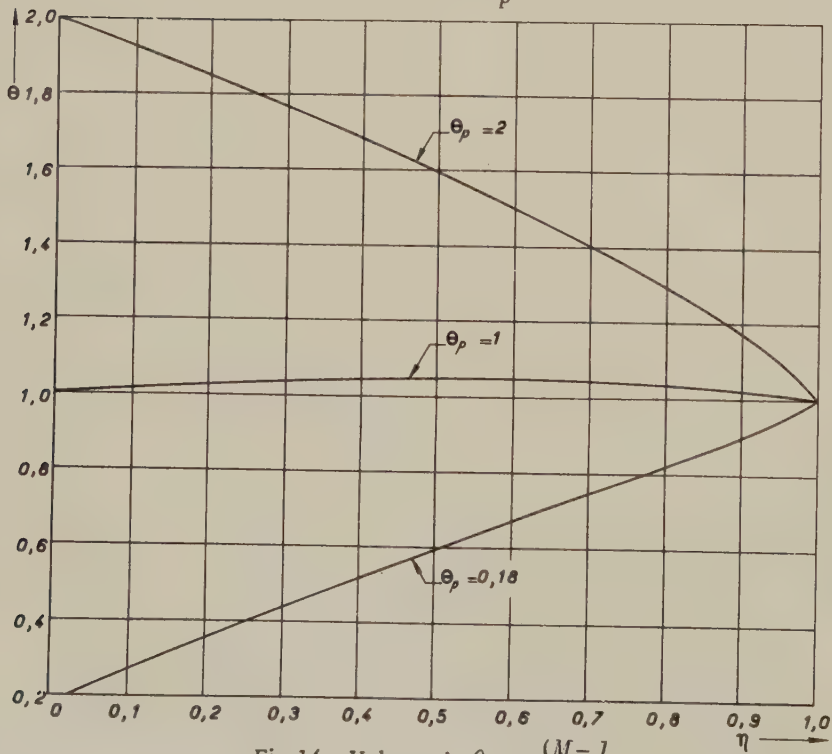


Fig.14 - Valeurs de θ pour $\begin{cases} M=1 \\ \theta_c=1 \end{cases}$
(paramètre : θ_p)

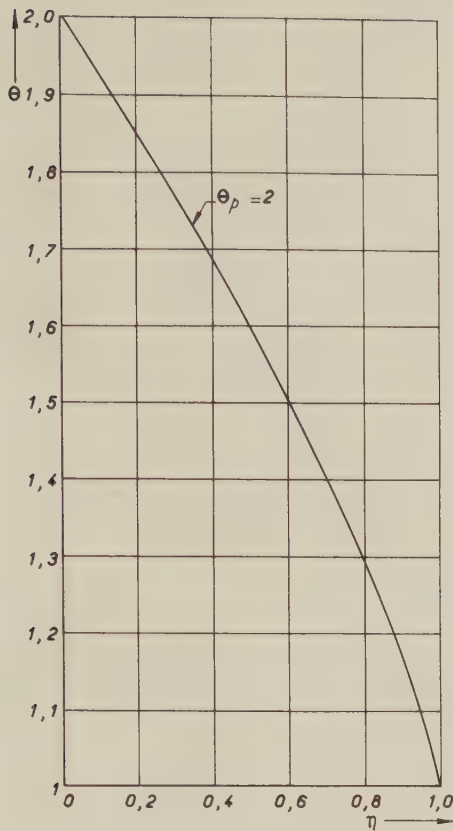


Fig.15 - Valeurs de θ pour $\begin{cases} M=1 \\ \theta_c=3 \end{cases}$
(paramètre : θ_p)

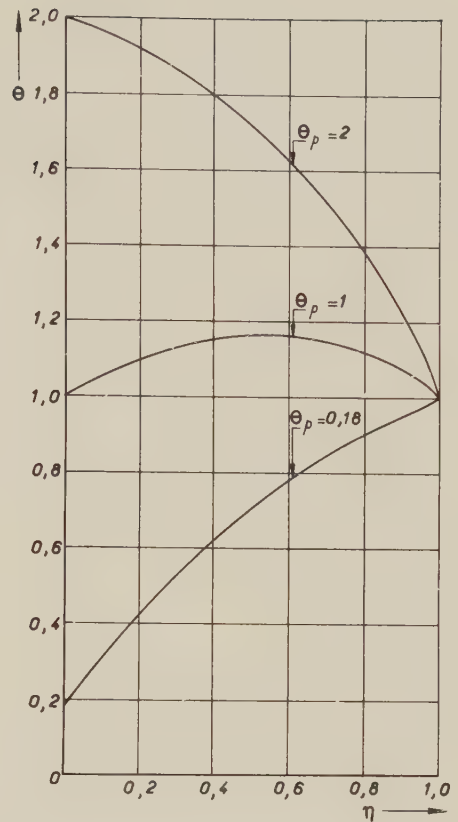


Fig.16 - Valeurs de θ pour $\begin{cases} M=2 \\ \theta_c=1 \end{cases}$
(paramètre : θ_p)

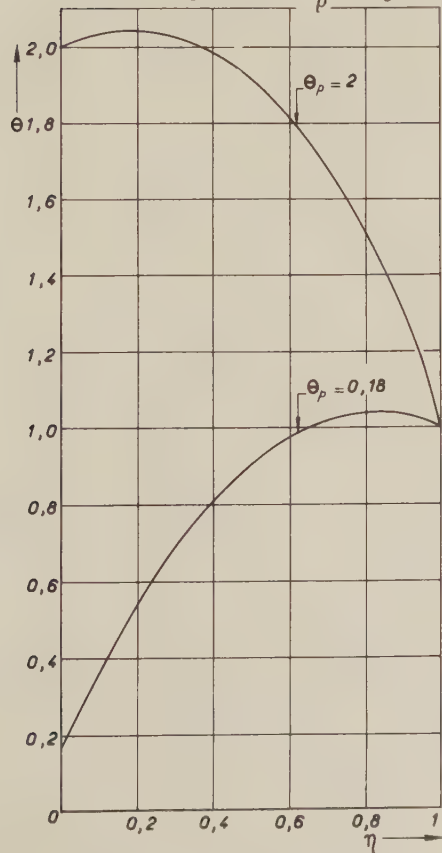


Fig.17 - Valeurs de θ pour $\begin{cases} M=3 \\ \theta_c=0,333 \end{cases}$
(paramètre : θ_p)

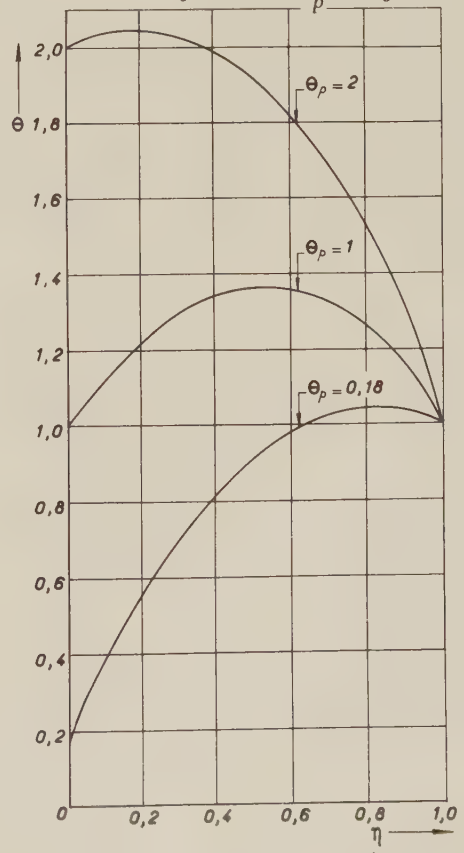


Fig.18 - Valeurs de θ pour $\begin{cases} M=3 \\ \theta_c=1 \end{cases}$
(paramètre : θ_p)

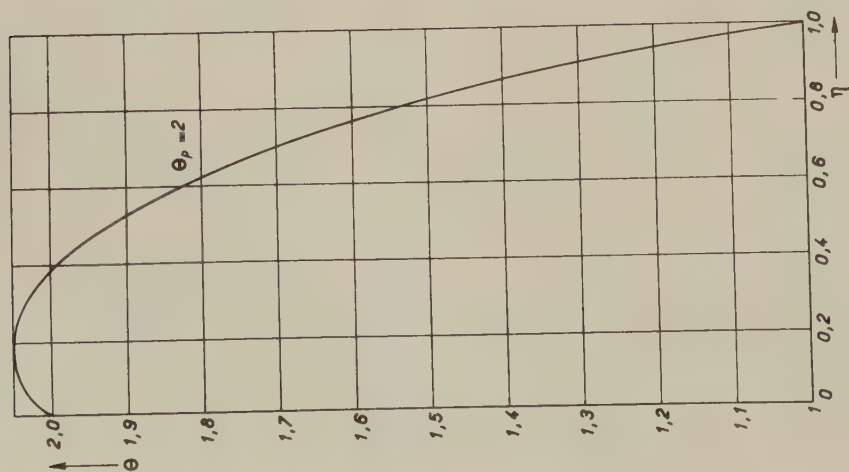


Fig.19 - Valeurs de θ pour $\begin{cases} M = 3 \\ \theta_c = 3 \end{cases}$
($\theta_p = 2$)

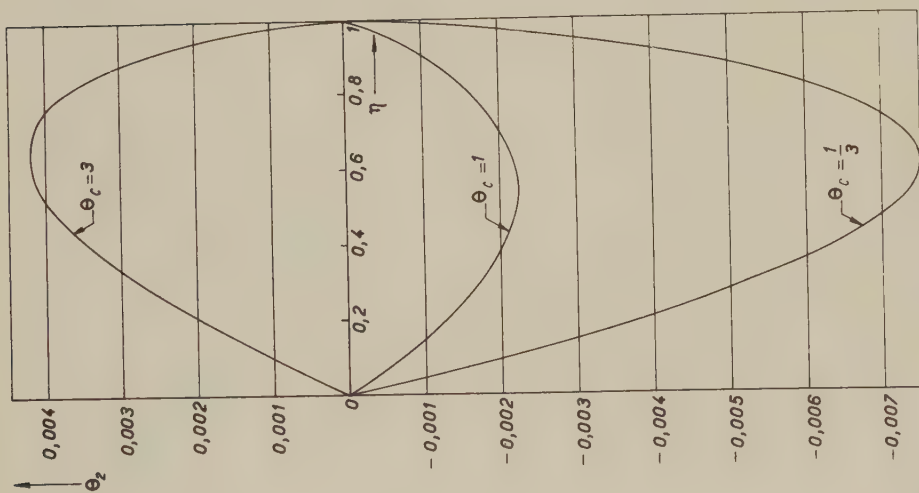


Fig.20 - Valeurs de θ_2 pour $\begin{cases} M = 1 \\ \theta_c = 2 \end{cases}$
(paramètre : θ_c)

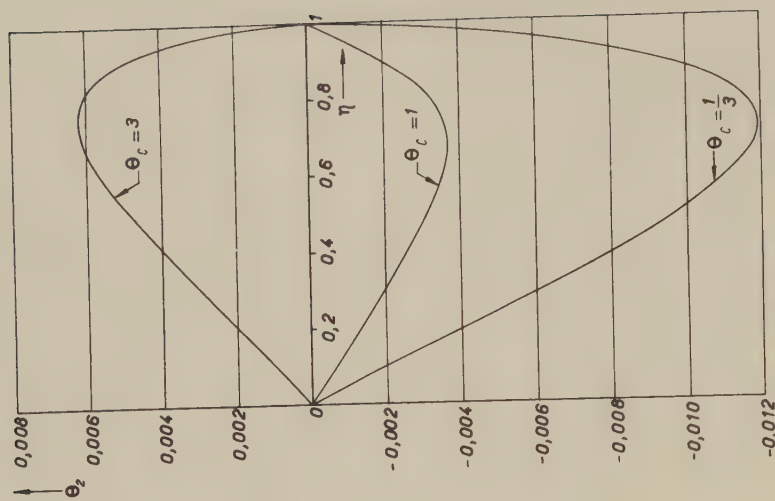


Fig.21 - Valeurs de θ_2 pour $\begin{cases} M = 3 \\ \theta_p = 2 \end{cases}$
(paramètre : θ_c)

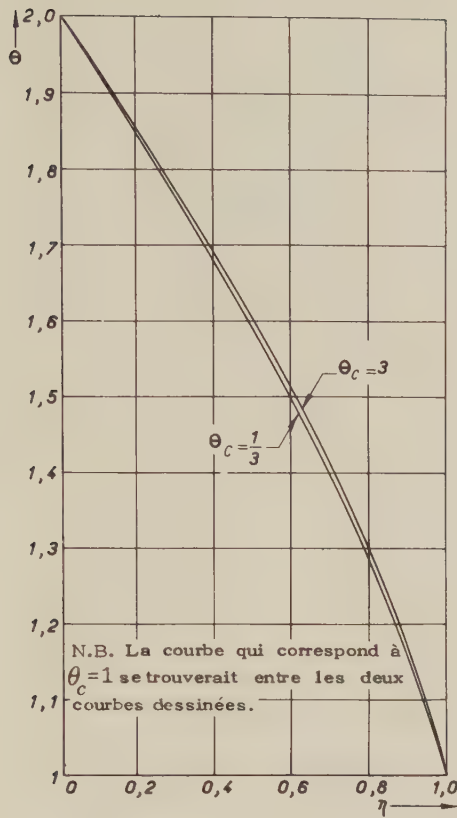


Fig.22 - Valeurs de θ pour $\begin{cases} M=1 \\ \theta_p=2 \end{cases}$
(paramètre : θ_c)

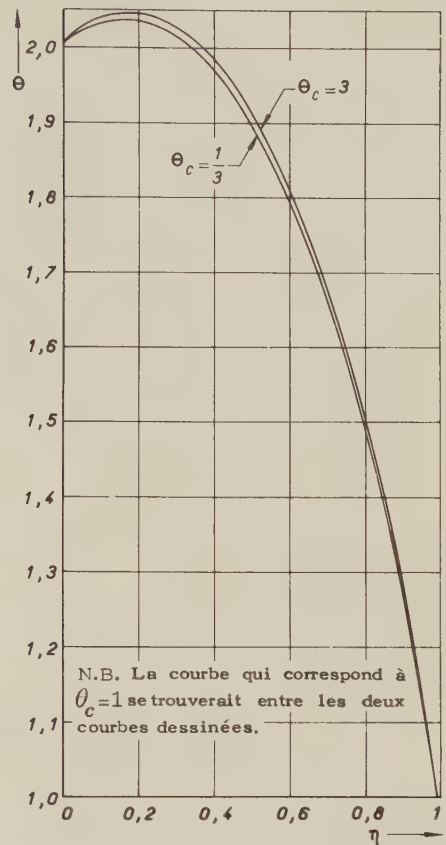


Fig.23 - Valeurs de θ pour $\begin{cases} M=3 \\ \theta_p=2 \end{cases}$
(paramètre : θ_c)

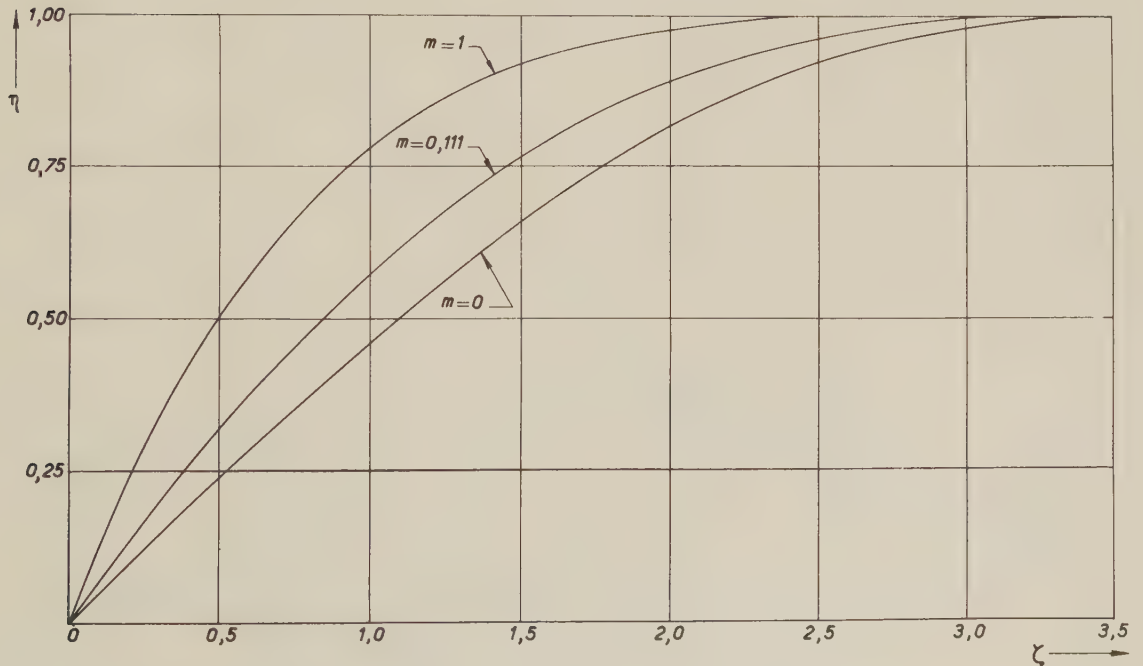


Fig.24 - Profils de HARTREE en fonction de ζ

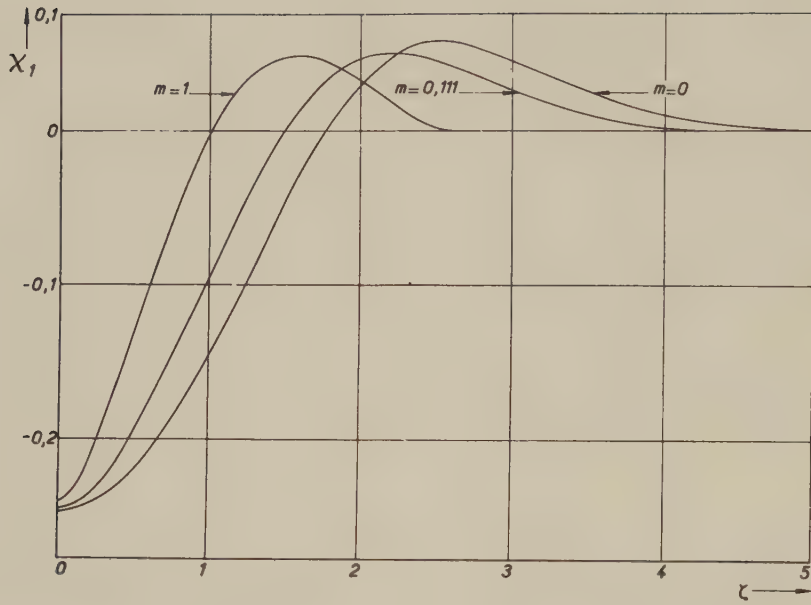


Fig.25 - Profils de χ_1 en fonction de ζ (paramètre : m)

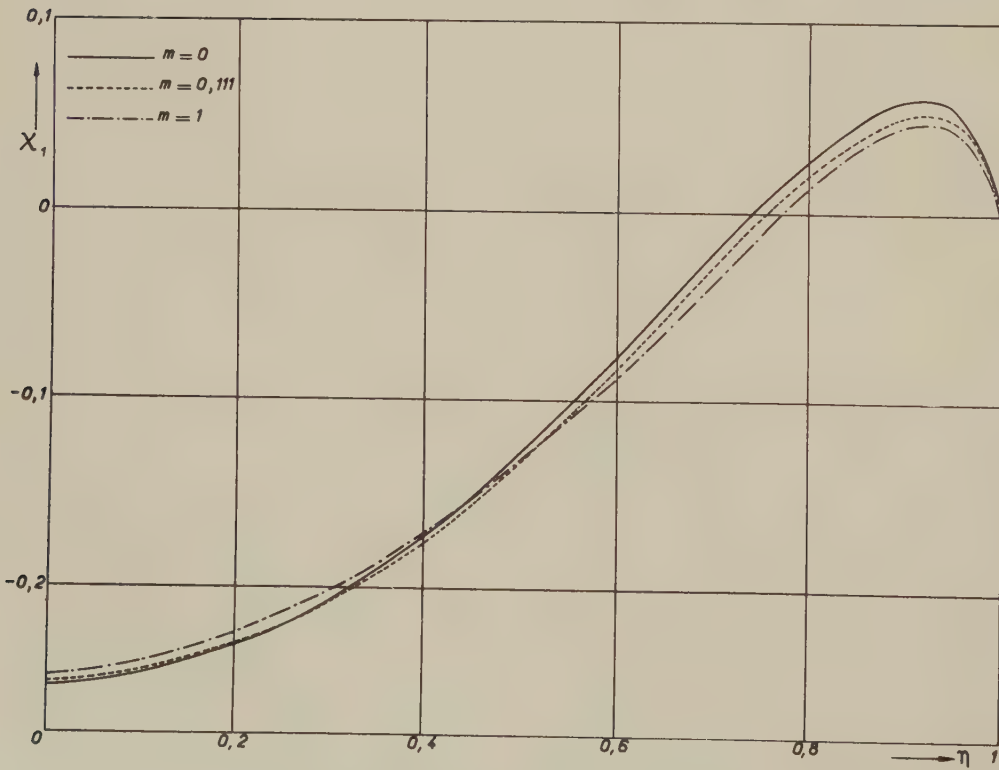
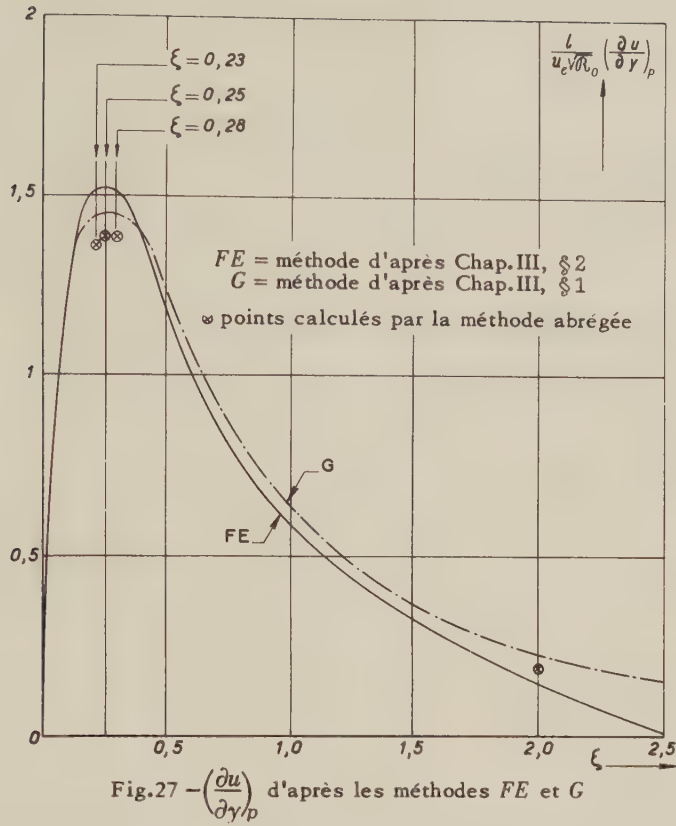
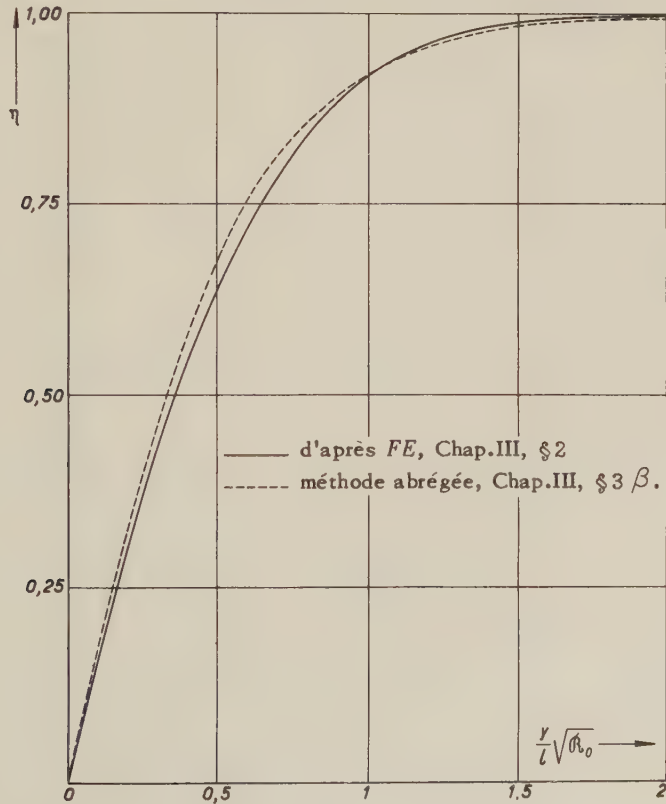
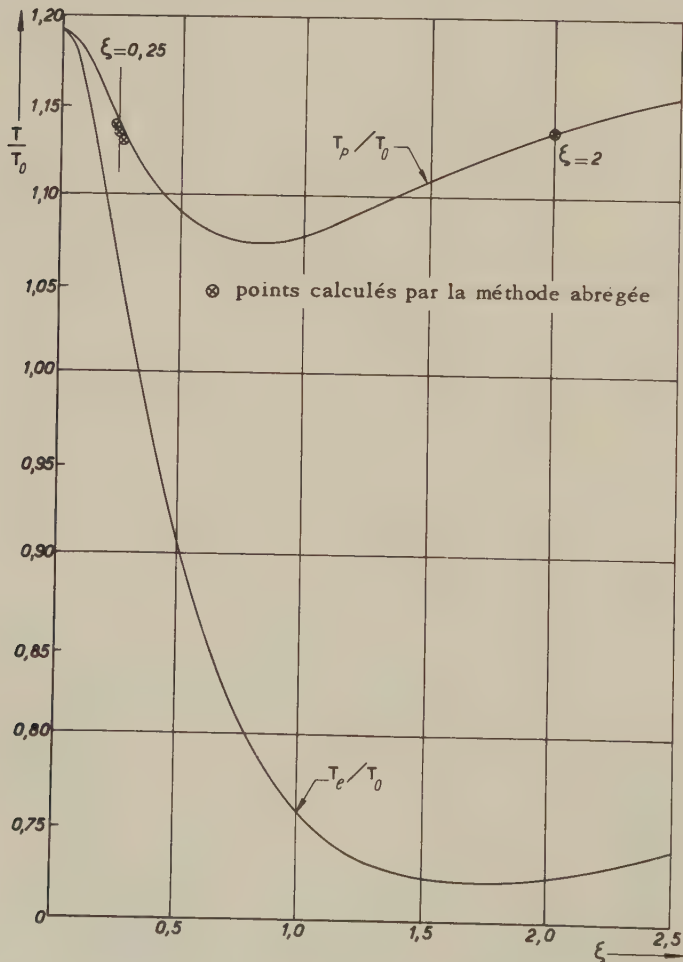
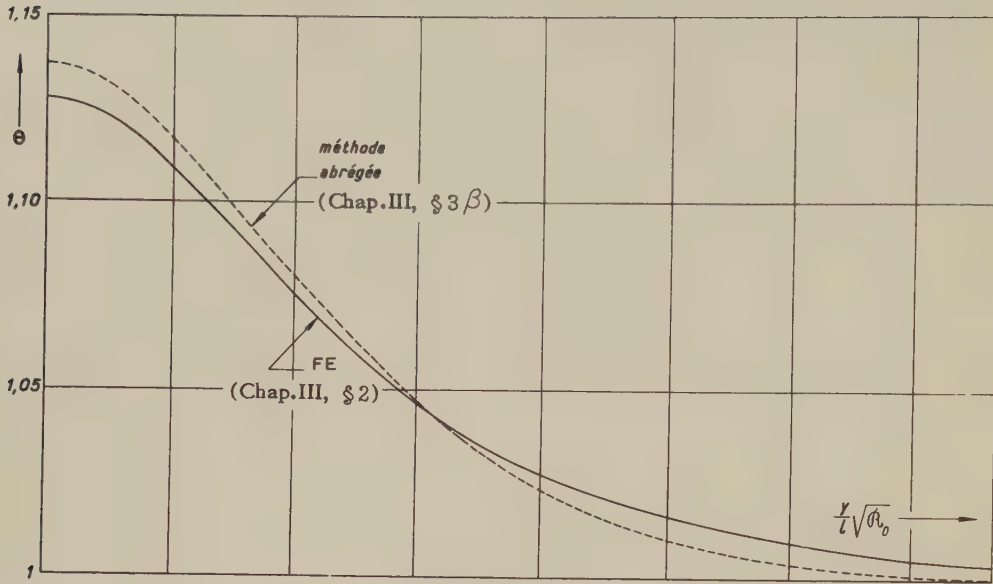


Fig.26 - Profils de χ_1 en fonction de η (paramètre : m)



(pour la détermination de la courbe de la méthode abrégée entre $\xi = 0,23$ et $\xi = 0,28$ on disposait de 6 points).





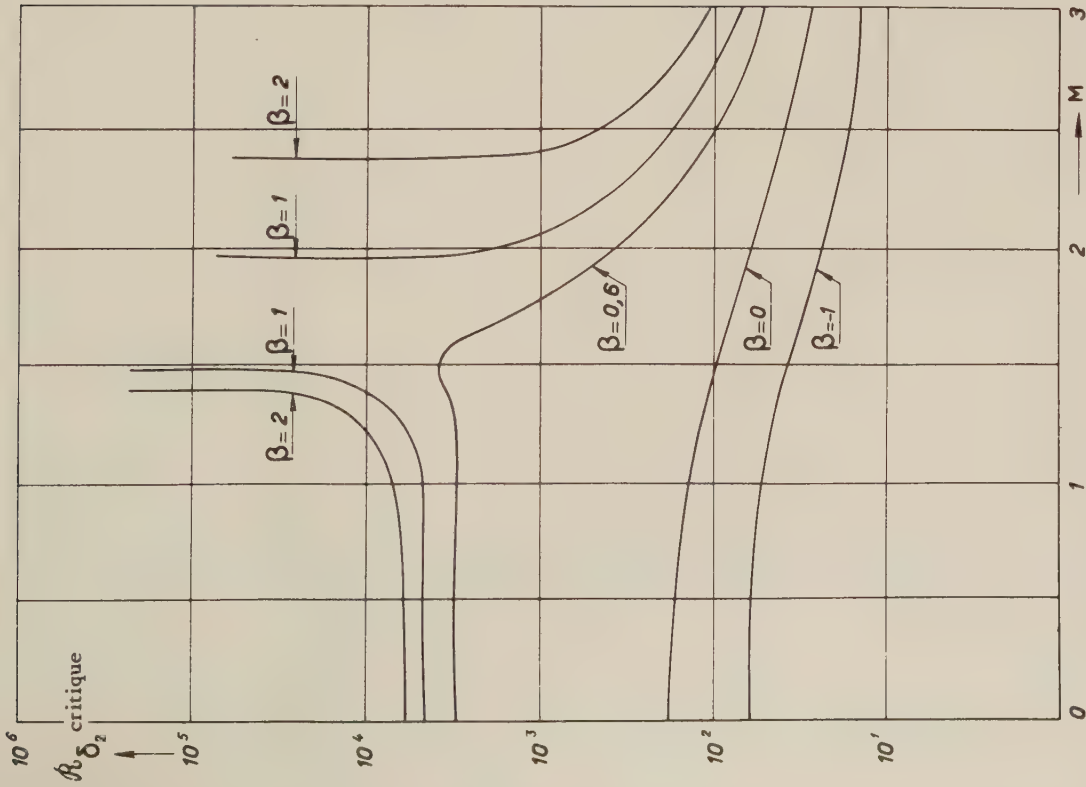


Fig.31 - Nombres de Reynolds critiques par rapport au nombre de Mach pour écoulements extérieurs $u_e = C \cdot x^m$; paramètre : $\beta = \frac{2m}{m+1}$ (d'après [19] fig.5)

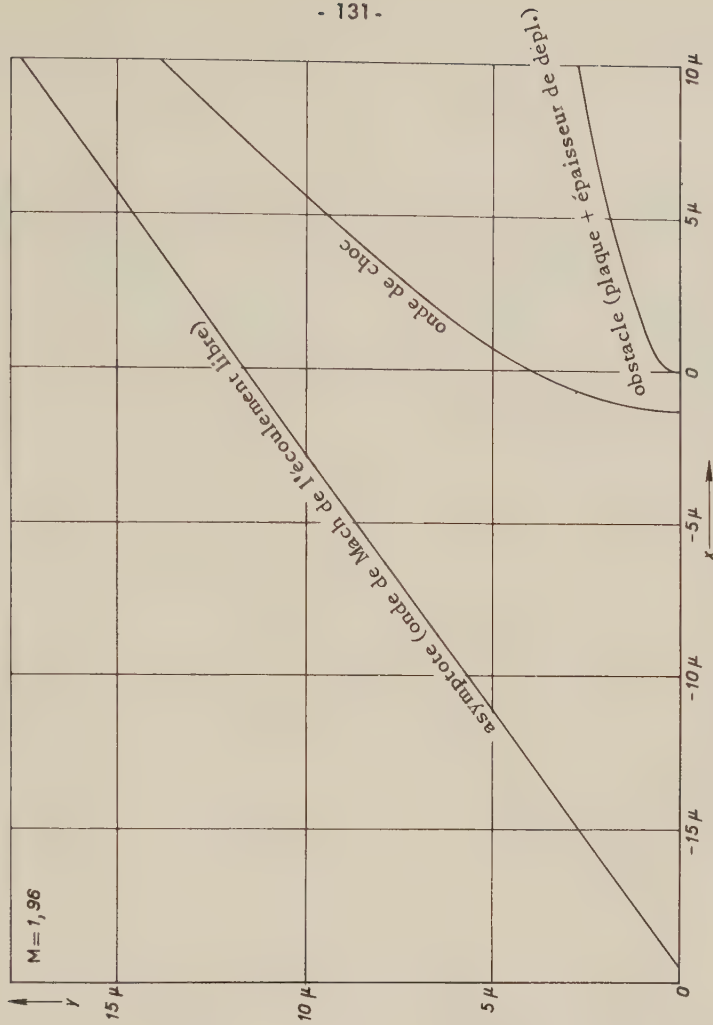


Fig.32

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

PROBLÈME DE CAUCHY ET TRANSFORMATION DE FOURIER

Vu et approuvé :

Paris, le 20 Juin 1955

Le Doyen de la Faculté des Sciences

J. PÉRÈS

Vu et Permis d'imprimer :

Pour le Recteur de l'Académie de Paris,

Le Vice Président du Conseil de l'Université de Paris,

J. HYPPOLITE

